N° D'ORDRE :

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

PHILIPPE BÉATRIX

1re THÈSE. — Contribution à l'étude du comportement mécanique des métaux cubiques à faces centrées sous hautes pressions dynamiques.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 25 janvier 1966 devant la Commission d'examen

MM. Pr GERMAIN..... *Président*

Pr FRIEDEL..... } *Examinateurs*

Pr SIESTRUNCK .. }

PARIS

IMPRIMERIE NATIONALE

1966

N° D'ORDRE :

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

PHILIPPE BÉATRIX

1re THÈSE. — Contribution à l'étude du comportement mécanique des métaux cubiques à faces centrées sous hautes pressions dynamiques.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 25 janvier 1966 devant la Commission d'examen

MM. Pr GERMAIN..... *Président*

Pr FRIEDEL..... } *Examinateurs*

Pr SIESTRUNCK.. }

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE

1966

UNIV. LEIDEN BIBL.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY

G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
DE BROGLIE.....	T	Théories physiques.
PRENANT.....	T	Anatomie et histologie comparées.
GRASSÉ.....	T	Evolution des êtres organisés.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.
CHAUDRON.....	T	Chimie appliquée.
WYART.....	T	Minéralogie et cristallographie.
TEISSIER.....	T	Zoologie.
MANGENOT.....	T	Biologie végétale (Orsay).
P. AUGER.....	T	Physique quantique et relativité.
MONNIER.....	T	Physiologie générale.
PIVETEAU.....	T	Paléontologie.
ROCARD.....	T	Physique (E.N.S.).
G. CARTAN.....	T	Mathématiques (E.N.S).
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.
FAVARD.....	T	Géométrie supérieure.
COULOMB.....	T	Physique du globe.
COUSIN (M[lle]).....	T	Biologie animale (S.P.C.N.).
CHRÉTIEN.....	T	Chimie minérale.
P. DRACH.....	T	Zoologie.
KASTLER.....	T	Physique (E.N.S.).
EPHRUSSI.....	T	Génétique.
RIVIÈRE.....	T	Géologie S.P.C.N. et sédimentation.
GAUTHERET.....	T	Biologie végétale (P.C.B.).
R. LUCAS.....	T	Recherches physiques.
A. THOMAS.....	T	Biologie cellulaire.
ARNULF.....	T	Optique appliquée.
M. MORAND.....	T	Enseignement de physique.
SOLEILLET.....	T	Physique (P.C.B.).
FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.
DANJON.....	T	Astronomie.
PETIT.....	T	Biologie maritime.
QUENEY.....	T	Météorologie et dynamique atmosphèr.
GALLIEN.....	T	Embryologie.
EICHHORN.....	T	Botanique.
DE CUGNAC.....	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).
CAUCHOIS (M[lle]).....	T	Chimie physique.
THELLIER.....	T	Physique du globe.
L'HÉRITIER.....	T	Biologie générale (Orsay).
GRIVET.....	T	Radioélectricité (Orsay).
PONCIN.....	T	Mécanique générale.
DUBREIL.....	T	Arithmétique et théorie des nombres.
QUELET.....	T	Chimie organique.
CAGNIARD.....	T	Géophysique appliquée
CHAMPETIER.....	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER.....	T	Micropaléontologie.
JUNG.....	T	Pétrographie.
TRILLAT.....	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN.....	T	Chimie organique et structurale.
JACQUINOT.....	T	Spectroscopie et physique céleste.
VASSY.....	T	Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES.....	T	Théories physiques.
AMIEL.....	T	Chimie générale.
HOCART.....	T	Minéralogie et cristallographie.
J.-P. MATHIEU.....	T	Physique (Orsay).
COUTEAUX.....	T	Biologie animale (P.C.B.).
MAY.....	T	Zoologie (Orsay).
CHOQUET.....	T	Théorie des fonctions et topologie.
FELDMANN.....	T	Biologie végétale marine.
GUINIER.....	T	Physique des solides (Orsay).
JOST.....	T	Physiologie comparée.
FORTET.....	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.
SCHWARTZ.....	T	Calcul différentiel et intégral.
CHOUARD.....	T	Physiologie végétale.
MALAVARD.....	T	Aviation (Technique aéronautique).
BRELOT.....	T	Calcul différentiel et intégral.
NORMANT.....	T	Synthèse organique générale.
BÉNARD.....	T	Chimie minérale.
BUVAT.....	T	Botanique (E.N.S.).
DUGUÉ.....	T	Statistiques mathém.
SOULAIRAC.....	T	Psychophysiologie.
ULRICH.....	T	Physiologie végétale.
MARÉCHAL.....	T	Optique théorique et appliquée.
KIRRMANN.....	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD.....	T	Botanique.
LE BRETON (M[lle]).....	T	Physiologie de la nutrition.
SALEM.....	T	Mathématiques générales.
LELONG.....	T	Application de l'analyse de la géométrie.
DEVILLERS.....	T	Anatomie et histologie comparées.
EHRESMANN.....	T	Topologie algébrique.
FRANÇON.....	T	Physique (S.P.C.N.).
GLANGEAUD.....	T	Géographie physique et géologie dynamique.
GODEMENT.....	T	Mathématiques (M.P.C.).
PISOT.....	T	Techniques mathématiques de la physique
ROCH.....	T	Géologie.

Schatzmann	T	Astrophysique.
Termier	T	Paléontologie stratigraphique.
Zamansky	T	Mathématiques générales.
Lennuier	T	Physique (M.G.P.).
Rizet	T	Génétique (Orsay).
Routhier	T	Géologie appliquée.
Tonnelat (M^me^)	T	Physique théorique.
Dixmier	T	Mathématiques (M.P.C.).
Souchay	T	Chimie générale.
Aigrain	T	Electrotechnique générale.
Brusset		Chimie systématique.
M. Lévy	T	Physique théorique des hautes énergies.
Chaix (M^me^)	T	Chimie biologique.
Hurel-Py (M^me^)		Biologie végétale (P.C.B.).
Plaux		Chimie (M.P.C.).
Brun	T	Mécanique théorique des fluides.
Lederer	T	Chimie biologique.
Dubreil (M^me^)	T	Mathématiques (Agrégation).
Lelong (M^me^)	T	Mathématiques (E.N.S.).
Bellair	T	Géologie (S.P.C.N.).
Cotte	T	Physique électricité.
J.-E. Dubois	T	Chimie organique.
Lamotte		Zoologie (E.N.S.).
André Michel	T	Chimie minérale (Orsay).
Olmer	T	Énergétique générale.
Rouault	T	Électricité (Orsay).
Gauthier	T	Mécanique appliquée.
Barchewitz	T	Chimie physique.
Brossel	T	Physique atomique.
Buser		Physiologie comparée.
Camus	T	Physiologie végétale (B.M.P.V.).
Castaing		Physique (Orsay).
Curien		Minéralogie et cristallographie.
Moyse	T	Physiologie végétale (Orsay).
Noirot	T	Évolution des êtres organiques.
Pannetier		Chimie générale (Orsay).
Possompes	T	Zoologie.
Pullmann		Chimie théorique.
Teillac		Physique nucléaire et radioactivité.
Tonnelat		Biologie physico-chimique.
Ville	T	Econométrie.
Willemart		Chimie (P.C.B.).
Dodé	T	Chimie (Orsay).
Freymann	T	Recherches physiques.
Guinochet	T	Biologie végétale (S.P.C.N.) [Orsay].
Rollet	T	Chimie (P.C.B.).
Josien (M^lle^)	T	Chimie (P.C.B.)
Chevalley	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
Arnoult	T	Électronique (Orsay).
Chapelle	T	Physique (Orsay).
Delange	T	Mathématiques (Orsay).
Deny	T	Mathématiques générales (Orsay).
Germain	T	Mécanique théorique des fluides.
Lucas G.	T	Géologique.
Allard		Chimie physique.
Berthelot		Physique fondamentale des hautes énergies (Orsay). Radioactivité.
Bricard		Météorologie et physique de l'atmosphère.
Albe-Fessard (M^me^)		Psychophysiologie.
Griedel		Physique des solides (Orsay).
M. Julia		Étude des molécules organiques complexes.
Lender		Biologie animale (S.P.C.N.) [Orsay].
Magat		Physico-chimie des radio-éléments.
Quintin (M^lle^)	T	Électrochimie.
Monod	T	Chimie du métabolisme.
Benoit	T	Physiologie animale (Orsay).
De Possel	T	Analyse numérique.
Charlot	T	Chimie analytique.
Haissinsky	T	Radiochimie.
Lemée	T	Physiologie végétale (B.M.P.V.) [Orsay].
Guérin	T	Chimie (M.P.C.) [Orsay].
M. Chatelet		Chimie (M.C.B.).
Jean		Physique nucléaire (Orsay).
Mattler		Physique (S.P.C.N.).
Louis Michel		Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
Bergerard		Zoologie (Orsay).
Bertein		Électronique (Orsay).
Bouissières		Chimie des radioéléments (Orsay).
Couture (M^me^)		Thermodynamique et mécanique physique.
Ellenberger		Géologie appliquée sur le terrain.
Franc		Biologie animale (P.C.B.)
Schnell		Botanique tropicale (Orsay).
Stolkowski		Physiologie générale.
Acher		Chimie biologique (Orsay).
Baudoin		Biologie animale (P.C.B.).
Beaumont		Biologie animale (S.P.C.N.).
Blamont		Géophysique ionosph.
Bourreau		Botanique.
D. Curie		Physique (M.G.P.).
Durand-Delga		Géologie.
Fréon		Chimie organique (Orsay].
Heller		Physiologie végétale.
Tortrat		Calcul des probabilités.
Cailleux		Géologie (S.P.C.N.)
Magnan		Physique (S.P.C.N.).
Daudel		Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la physique nucléaire.
Fourcroy (M^lle^)		Biologie végétale (S.P.C.N.).

Choquet - Bruhat (M^me^).	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.
Veil (M^lle^)		Physiologie générale.
Lwoff	T	Microbiologie.
Siestrunck	T	Mécanique physique et expérimentale.
Lacombe		Métallurgie des métaux nucléaires.
Brochard	T	Physique (P.C.B.) [Orsay].
Cabannes	T	Mécanique générale.
Lesieur	T	Mathématiques (M.P.C.) [Orsay].
Mazet	T	Mécanique générale (Orsay).
Caire		Géographie physique et géologie dynamique.
Comolet	T	Mécanique des fluides.
Corabœuf		Physiologie animale.
Delloue		Physique de l'exosphère.
Gorenflot		Botanique II (Orsay).
Houillon		Biologie animale (P.C.B.).
J. Jullien		Chimie (P.C.B.)
Malgrange	T	Technique mathématique de la physique.
Olivier		Anthropologie.
Nozeran	T	Botanique II)Orsay).
Blanc-Lapierre		Physique (E.N.S) [Orsay].
Chevaugeon	T	Botanique (Orsay).
Kahane	T	Mathématiques)Orsay).
Samuel	T	Mathématiques (E.N.S. féminines).
Kourganoff	T	Astronomie (Orsay).
Thiry	T	Mécanique céleste.

Secrétaire général R. Poullain

Le sujet de cette thèse, les domaines qu'il serait bon d'explorer, m'ont été indiqués par M. l'ingénieur en chef J. Berger. Je l'en remercie très sincèrement ainsi que de l'intérêt constant qu'il a manifesté pour ces recherches et des moyens expérimentaux qu'il a mis à ma disposition ; les difficiles expériences d'écaillage, sans lesquelles toute une partie de ce travail aurait manqué de support, ont été réalisées par M. Fauquignon et son équipe d'expérimentateurs avec beaucoup de compétence. Monsieur le Directeur du Centre d'études de Vaujours a bien voulu autoriser la poursuite et finalement la publication de cette étude.

J'exprime d'autre part à M. le professeur J. Mandel ma reconnaissance profonde pour ses encouragements, pour ses remarques et aussi pour ses critiques de tout ce qui n'était pas ou n'est pas encore rigoureusement fondé.

M. le professeur R. Siestrunck a accepté de se pencher avec attention sur ces questions de mécanique physique qui se situent à l'écart des préoccupations habituelles du mécanicien ; je lui en sais très vivement gré.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546825_0047

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE
DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES MÉTAUX CUBIQUES À FACES CENTRÉES SOUS HAUTES PRESSIONS DYNAMIQUES

SOMMAIRE

PAGES

INTRODUCTION 9

CHAPITRE 1. — LE COEFFICIENT DE GRÜNEISEN ET LES COEFFICIENTS D'ÉLASTICITÉ 11

1.1. Introduction 11
1.2. Calcul du coefficient de Grüneisen 11
1.3. Le module de rigidité de l'agrégat polycristallin et les constantes d'élasticité des monocristaux 19
1.4. Conclusion 20

CHAPITRE 2. — THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE (AGRÉGATS POLYCRISTALLINS) 21

2.1. Les variables d'état de l'agrégat 21
2.2. Les lois de comportement 22
2.3. Considérations thermodynamiques 23
2.4. Les mécanismes de la déformation plastique et du radoucissement 25
2.5. La forme des modèles mathématiques et la notion d'états correspondants 33

CHAPITRE 3. — APPLICATIONS 43

3.1. L'écoulement monodimensionnel; équations générales; structure des chocs 43
3.2. L'adiabatique de détente 46
3.3. L'adiabatique dynamique d'un métal et le calcul de l'équation d'état 48
3.4. Le phénomène d'écaillage 52

CONCLUSION 62

ANNEXES 63

PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISÉS 66

RÉFÉRENCES 67

INTRODUCTION

Les premières expériences de compression par choc remontent peut-être à un siècle mais c'est à l'occasion et à la suite de la deuxième guerre mondiale que démarrèrent aux U.S.A. des études systématiques sur les métaux. Leur but essentiel consistait à obtenir des équations d'état dans un domaine de pression (10^5-10^6 atm) alors inaccessible par les procédés statiques. D'autre part, la mise au point des armes nucléaires exigeait le calcul d'écoulements pour des pièces métalliques écrasées par choc. Ces recherches se poursuivirent aux U.S.A., puis en U.R.S.S., en Grande-Bretagne et en France et jusque vers les années 60 elles étaient fondées sur les idées suivantes :

a. Un métal comprimé sous plusieurs centaines de milliers d'atmosphères se comporte comme un fluide parfait; c'est-à-dire que, relativement, les cissions qui se développent dans le matériau peuvent être considérées comme négligeables. Une seule quantité, la pression hydrostatique p, fournie par l'équation d'état suffit à définir l'état des contraintes.

b. On admet qu'une équation d'état du type MIE-GRÜNEISEN est acceptable. Quant aux variations du coefficient de GRÜNEISEN $\gamma = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial E}\right)_\rho$ en fonction de la densité et de la température, l'hypothèse la plus simple qui s'accorde avec les résultats physiques théoriques consiste à supposer l'indépendance vis-à-vis de la température et que γ puisse s'exprimer à l'aide de dérivées par rapport à la densité du seul coefficient d'élasticité « hydrostatique » c'est-à-dire la compressibilité $\chi = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$ (SLATER, DUGDALE et MACDONALD, VASHCHENKO).

Ces deux principes se complètent logiquement car si l'on traite le métal comme un fluide parfait, le seul coefficient d'élasticité dont on dispose est bien la compressibilité. (On verra d'ailleurs que toute amélioration dans le calcul de l'équation d'état conduit à un progrès dans la connaissance du comportement mécanique et réciproquement.)

Toutefois, les modèles alors utilisés n'expliquaient pas une certaine différence entre quelques résultats de mesures statiques (méthodes de BRIDGMAN et apparentées) et dynamiques (compressions par choc). Ils n'expliquaient pas non plus les singularités de certains écoulements (affaiblissement des ondes de choc) et conduisaient à des résultats discordants dans l'interprétation de certains phénomènes (écaillage, par exemple). Il apparaissait alors nécessaire de tenir compte du défaut de fluidité des métaux et d'élargir aux états obtenus par choc les théories usuelles de plasticité. C'est ce que nous essayons dans cette étude.

L'introduction des cissions et l'amélioration du calcul de l'équation d'état, rendue nécessaire par le fait qu'on cherche une meilleure précision dans l'évaluation de chaque composante du tenseur des contraintes (donc aussi dans l'évaluation de la pression hydrostatique) reposent toutes deux, du moins dans une certaine mesure, sur la connaissance du module de cisaillement $\mu(\rho, T)$ [coefficient de

Lamé]. C'est pourquoi les recherches doivent être menées parallèlement dans deux directions différentes.

Dans une première partie de ce travail nous essaierons donc d'introduire le coefficient de Lamé dans l'expression du coefficient de Grüneisen. La seconde partie traitera plus particulièrement du comportement mécanique, c'est-à-dire de la plasticité des métaux sous hautes pressions dans le cadre d'un modèle élasto-plastique ou d'une théorie plus complète capable d'expliquer les effets de vitesse de déformation; vitesse qui sera toujours supposée très grande puisque supérieure à 10^4 dans les expériences dynamiques dont il est question ici. On s'efforcera de préciser les mécanismes microscopiques responsables des phénomènes observés.

La troisième partie contiendra les applications : en particulier un retour sur le calcul de l'équation d'état à partir de l'adiabatique dynamique, et un schéma mécanique valable pour l'interprétation de certains phénomènes d'écaillage [1].

---

[1] Un appendice situé à la fin de cette étude rassemble et explique la plupart des notations utilisées.

CHAPITRE PREMIER

LE COEFFICIENT DE GRUNEISEN ET LES COEFFICIENTS D'ÉLASTICITÉ

1.1. Introduction.

Dans les expériences dynamiques, à cause de la dissipation d'énergie dans le choc, la température s'élève et reste en général pendant l'écoulement toujours nettement au-dessus de la température de Debye bien que celle-ci augmente avec la densité (cf. fig. 1 et 2). On est donc conduit à considérer des états de la matière caractérisés par des taux de compression relativement élevés $\left(0{,}5 < \frac{v}{v_0} < 1\right)$ et des températures « moyennes », ceci signifiant qu'on ne se soucie pas des singularités thermiques associées aux basses températures et qu'on peut aussi, par exemple négliger l'énergie d'excitation électronique.

Le domaine dont il est question est celui où l'équation d'état de Mie-Grüneisen apparaît bien fondée [1]. Les difficultés surgissent lorsqu'on cherche comment le coefficient de Grüneisen γ, pierre angulaire du calcul de l'équation d'état, varie avec la densité. Des expressions maintenant classiques de la fonction $\gamma(v)$ ont été données par Slater d'une part, Dugdale et MacDonald d'autre part; Vashchenko et Zubarev (réf. 1), à la suite d'une étude critique de celles-ci, ont récemment proposé une nouvelle formule du même type basée sur la théorie du volume libre.

Comme, d'autre part, l'étude mécanique de la déformation plastique du métal par choc nécessite la connaissance du module de cisaillement μ (ou du coefficient de Poisson ν) à l'intérieur du même domaine de pression et de température et comme cette grandeur s'introduit indirectement dans le calcul des vibrations du réseau cristallin et, par conséquent, n'est pas sans rapport avec le comportement thermique du solide, on peut se proposer, comme l'ont d'ailleurs tenté Vashchenko et Zubarev, de l'utiliser dans l'estimation de γ. Nous nous efforcerons donc dans ce chapitre de préciser les relations qui existent, entre le coefficient de Grüneisen et les coefficients d'élasticité du monocristal, entre ceux-ci et le module de cisaillement de l'agrégat. Nous nous restreindrons au cas des cristaux cubiques qui est d'ailleurs d'une grande généralité.

1.2. Calcul du coefficient de Grüneisen.

En utilisant une méthode de perturbation, G. Leibfreid et W. Ludwig (réf. 2) ont étudié la fonction énergie libre (de Helmholz) F en conservant dans l'expression de l'énergie potentielle du réseau cristallin les termes du troisième et du

---

(1) Il s'agit, rappelons-le, de l'équation d'état $p(v, T) - p_i(v) + \frac{\gamma(v)}{v} E_T$ où $p = p_i(v)$ est l'équation de l'isotherme 0° K et E_T représente l'énergie interne d'origine thermique de l'état considéré (p, v, T).

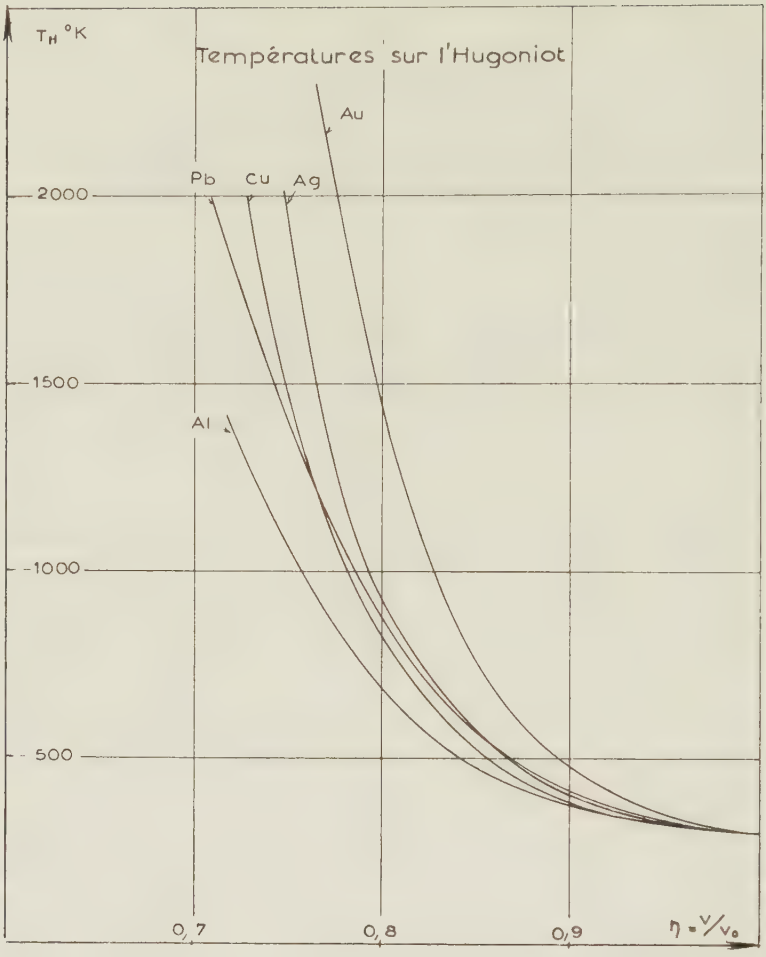


FIG. 1

quatrième ordre. Ils concluent que dans cette approximation, et si l'on cherche à calculer des dérivées partielles de F par rapport aux déformations, on peut se contenter d'estimer F selon une manière « quasi-harmonique ». C'est-à-dire qu'on suppose que les atomes vibrent d'une manière harmonique par rapport aux positions d'équilibre prescrites par la déformation ε_{ij} et que les fréquences propres de vibration varient avec cette déformation. Par conséquent :

$$(1) \qquad F(\varepsilon_{ij}, T) = \Phi_0(\varepsilon_{ij}) + kT \sum_{\alpha} ln \left[2 \operatorname{sh} \frac{\hbar \omega_\alpha(\varepsilon_{ij})}{2kT} \right]$$

où la sommation est effectuée sur les 3 N modes fondamentaux (N nombre d'atomes par unité de masse).

FIG. 2

On en déduit aisément que :

$$p(\rho, T) = -\beta^{o}(\rho) - \rho \sum_{\alpha} E_{\alpha}(T) \frac{\partial \ln \omega_{\alpha}}{\partial \ln v}$$

$E_{\alpha}(T)$ est l'énergie du mode α à la température T.

$$E_{\alpha}(T) = \frac{\hbar \omega_{\alpha}}{2} \coth \frac{\hbar \omega_{\alpha}}{2kT}.$$

Par conséquent :

$$\gamma = v \left(\frac{\partial p}{\partial E}\right)_{\rho} = \frac{\Sigma C_{\alpha} \gamma_{\alpha}}{\Sigma C_{\alpha}}$$

$C_\alpha = \frac{\partial E_\alpha}{\partial T}$ est la chaleur spécifique massique associée au mode α et $\gamma_\alpha = -\frac{\partial \ln \omega_\alpha}{\partial \ln v}$ est le coefficient de GRÜNEISEN associé au mode α.

Dans le domaine qui nous intéresse, celui des hautes températures, nettement supérieures à celle de DEBYE, on peut admettre que : $\gamma = \frac{1}{3N}\Sigma\gamma_\alpha$.

C'est donc cette somme qu'il convient de calculer.

Si nous considérons le métal comme un continu, les ondes élastiques se propagent sans dispersion, c'est-à-dire que leur vitesse ne dépend que de leur direction. On sait d'ailleurs qu'à une direction définie par le vecteur unité $\vec{u}$ de cosinus directeurs α_i correspondent 3 célérités a_i ($i = 1, 2, 3$) associées respectivement à l'onde « longitudinale » et aux deux ondes « transversales ».

Si donc le vecteur déplacement de la vibration d'indice α s'écrit

$$\vec{E}_\alpha e^{i(\vec{q}_\alpha \vec{r} - \omega_\alpha t)} \quad (\text{où } \vec{q}_\alpha = q_\alpha \vec{u})$$

la pulsation ω_α est donnée par $\omega_\alpha = a_i(\vec{u}) q_\alpha$ où $i = 1$, 2 ou 3 selon la famille à laquelle appartient cette onde [1].

Nous introduirons la dispersion d'une manière approximative en suivant une suggestion de BORN et auparavant nous remplacerons la cellule unité de l'espace réciproque — à l'intérieur de laquelle doit se déplacer l'extrémité du vecteur $\vec{q}$ — par une sphère d'égal volume et dont le rayon est par conséquent $R = \left(6\pi^2 \frac{N}{v}\right)^{1/3}$ (N étant, bien entendu, le nombre d'atomes par unité de masse) [réf. 3].

Dans l'hypothèse du continu élastique, pour une direction $\vec{u}$ la relation $\omega^{(i)}(q)$ est représentée par un segment de droite. L'idée de BORN consiste à le remplacer par un arc de sinusoïde qui lui soit tangent à l'origine et dont la pente soit nulle pour $q = R$. C'est-à-dire que :

$$\omega_\alpha^{(i)} = \frac{2R}{\pi} a_i(\vec{u}_\alpha) \sin \frac{\pi}{2} \frac{q_\alpha}{R}.$$

Les trois vitesses $a_i(\vec{u})$ sont alors calculées comme dans la théorie du continu élastique. Notons c_{11}^0 c_{12}^0 c_{44}^0 les constantes d'élasticité [2] à la température 0 °K (pour la densité ρ envisagée) et introduisons :

$$G_3 = c_{11}^0 - c_{44}^0$$

$$G_2 = \frac{c_{12}^0 + c_{44}^0}{G_3}.$$

Les trois quantités Z_i déduites des a_i par :

$$Z_i = \frac{\rho a_i^2 - c_{44}^0}{G_3}$$

(1) Pour plus de clarté nous indiquerons cette famille à l'aide d'un indice supérieur (i) marqué entre parenthèses.

(2) Notation de Voigt.

sont les racines de l'équation suivante (réf. 4) :

$$0 = Z^3 - Z^2 + Z(1 - G_2^2)(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2) - \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2(1 - 3G_2^2 + 2G_2^3)$$

$$\gamma_\alpha^{(i)} = -\frac{\partial \ln \omega_\alpha^{(i)}}{\partial \ln v} = -\frac{\partial \ln R\, a_i(\vec{u}_\alpha)}{\partial \ln v}$$

puisque $\frac{q_\alpha}{R}$ reste constant lorsque v varie. Par conséquent :

$$\gamma = \frac{1}{3N}\sum_\alpha \left(\frac{1}{3} - \frac{\partial \ln a_i(\vec{u}_\alpha)}{\partial \ln v}\right).$$

La sommation s'effectue d'abord pour toutes les ondes dont la direction de propagation s'inscrit dans un angle solide $d\Omega$ autour de $\vec{u}$.

Puisque :

$$\frac{\partial \ln a_i}{\partial \ln v} = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \rho a_i^2}{\partial \ln v} + \frac{1}{2}$$

on aura :

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{\partial \ln a_i(\vec{u}_\alpha)}{\partial \ln v} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \ln}{\partial \ln v}[(G_3 Z_1 + c_{11}^0)(G_3 Z_2 + c_{44}^0)(G_3 Z_3 + c_{11}^0)] + \frac{3}{2}\\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln}{\partial \ln v}[G_3^3(1 - 3G_2^2 + 2G_2^3)\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\\ &\quad + c_{44}^0 G_3^2(1 - G_2^2)(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2) + c_{44}^{02} G_3 + c_{44}^{03}]\\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln g}{\partial \ln v}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\gamma = \frac{1}{12\pi}\int_{S(1)}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln g}{\partial \ln v}\right)d\Omega = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3\pi}\frac{\partial}{\partial \ln v}\int_{Q(1)} \ln g\, d\Omega$$

Q (1) désignant un quadrant d'angle solide.

Il sera commode d'utiliser comme paramètres :

$$K_0 = \frac{c_{11}^0 + 2c_{12}^0}{3} \qquad A = \frac{c_{11}^0 - c_{12}^0}{2c_{44}^0} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{K^0}{c_{44}^0}$$

A mesure le degré d'anisotropie du cristal.

On obtient alors :

$$g = \left(\frac{K^0}{B}\right)^3\left\{\frac{4A}{3} + B + 4(A-1)\left(\frac{A}{3} + B\right)(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2) + 4(A-1)^2(1 + 3B)\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\right\}.$$

D'où finalement :

$$\gamma = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln K_0}{\partial \ln v} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \ln v}\frac{2}{3\pi}\int_{Q(1)} \ln \frac{1}{B^3}\left[\frac{4A}{3} + B + 4(A-1)\left(\frac{A}{3} + B\right)\right.$$
$$\left.(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2) + 4(A-1)^2(1+3B)\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\right] d\Omega$$
$$= -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln K_0}{\partial \ln v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G(A, B)}{\partial \ln v}.$$

Le tableau I fournit une tabulation de la fonction G(AB).

Remarques.

1. On obtient le même résultat en ignorant la dispersion et en écrivant :

$$\omega_\alpha^{(i)} = a_i(\vec{u}_\alpha)\, q_\alpha.$$

2. Si l'on suppose le métal isotrope (A = 1), caractérisé par l'unique module de cisaillement μ_0, γ s'exprime par la formule approchée :

$$\gamma = -\frac{1}{6} - 0{,}09\frac{\partial \ln K_0}{\partial \ln v} - 0{,}41\frac{\partial \ln \mu_0}{\partial \ln v}$$

qu'il faut comparer à la relation indiquée au bas de la page 17.

TABLEAU I

La fonction G(AB)

A \ B	1	1,4	1,8	2,2	2,6	3	3,4	3,8
1.....	0,282	−0,001	−0,207	−0,368	−0,499	−0,610	−0,706	−0,790
0,9.....	0,247	−0,036	−0,241	−0,401	−0,531	−0,642	−0,737	−0.821
0,8.....	0,208	−0,073	−0,277	−0,436	−0,566	−0,676	−0,771	−0,855
0,7.....	0,166	−0,113	−0,316	−0,474	−0,604	−0,713	−0,808	−0,891
0,6.....	0,120	−0,158	−0,359	−0,517	−0,645	−0,754	−0,848	−0,931
0,5.....	0,068	−0,208	−0,407	−0,564	−0,692	−0,800	−0,893	−0,975
0,4.....	0,009	−0,264	−0,462	−0,617	−0,744	−0,851	−0,944	−1,025
0,3.....	−0,060	−0,330	−0,525	−0,678	−0,804	−0,910	−1,002	−1,083
0,2.....	−0,144	−0,409	−0,602	−0,753	−0,877	−0,982	−1,072	−1,153
0,1.....	−0,256	−0,514	−0,702	−0,850	−0,971	−1,074	−1,164	−1,243

On peut comparer cette formule avec celles précédemment proposées qui peuvent toutes s'écrire de la manière suivante :

$$\gamma = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\frac{\partial ln K_0}{\partial ln v} - \frac{1}{2}\frac{\partial ln\left(1 - \frac{np_i}{K_0}\right)}{\partial ln v} \qquad \text{si} \qquad \frac{np_i}{K_0} < 1$$

(en général vérifié).

En particulier à la pression zéro : $\gamma = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\frac{\partial ln K_0}{\partial ln v} - \frac{n}{2}$, n est égal à 0, $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{3}$ selon qu'il s'agit de la formule de SLATER ou de DUGDALE et MACDONALD ou finalement de celle proposée par VASHCHENKO et ZUBAREV.

On remarque (fig. 3) que pour une valeur de A donnée, G(AB) est une fonction presque linéaire de ln B, le coefficient de lnB dépendant lui-même assez peu de A.

Pour un métal donné on pourra donc approcher la fonction G au voisinage du point A_0 B_0 — correspondant à l'état d'équilibre à 0 °K et sous pression zéro, volume v_0 — de la manière suivante :

$$G - G_0 = \alpha \, Ln \frac{A}{A_0} + \beta \, Ln \frac{B}{B_0}$$

β est en général compris entre — 0,7 et — 0,8 et α entre 0,1 et 0,3. Les formes de γ habituellement utilisées reviennent à admettre que :

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{B}{B_0}\right)^{\beta} = 1 - \frac{np_i}{K_0} \sim 1 + n\frac{v - v_0}{v_0} \text{ pour } v \text{ voisin de } v_0$$

si n est choisi positif A^{α} B^{β} doit donc décroître lorsque la pression croît.

Cas particulier : $\frac{A}{A_0} = 1$. L'anisotropie du cristal reste constante :

$$\gamma = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}(1 + \beta)\frac{\partial ln K_0}{\partial ln v} + \frac{1}{2}\beta\frac{\partial ln c'_{11}}{\partial ln v}.$$

Des travaux théoriques vérifiés expérimentalement justifient l'hypothèse précédente dans le cas des métaux alcalins (réf. 5). Pour le sodium on possède en particulier les données numériques suivantes :

$$\frac{d ln c'_{11}}{d ln v} = -2{,}4 \qquad \frac{d ln K_0}{d ln v} = -3{,}60$$

(valables dans les conditions $p = 0$, T = 0 °K). La précision des mesures ne semble d'ailleurs pas être supérieure à 10 %. Compte tenu de ce que $\beta = 0{,}76$ on en déduirait $\gamma = 1{,}18$ alors que les formules de SLATER, DUGDALE - MACDONALD et VASHCHENKO fournissent respectivement 1,63, 1,30 et 0,97. La valeur obtenue expérimentalement à partir de la formule : $\gamma = \frac{\alpha K v}{c_v}$ est 1,25.

66 2111 0 67 003 3

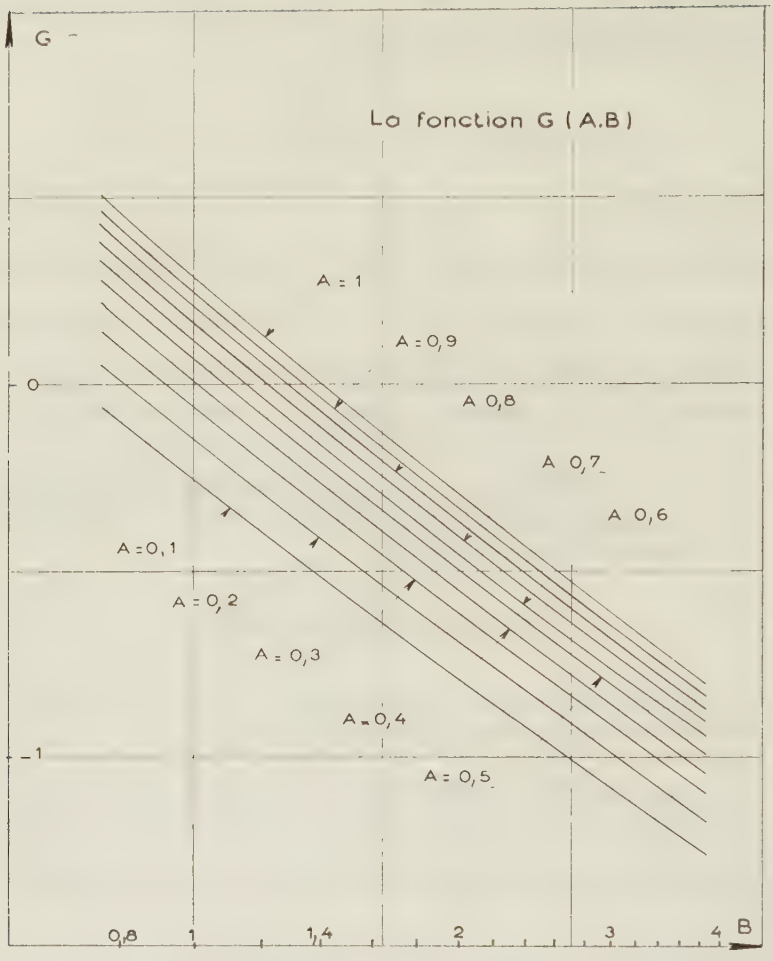


FIG. 3

Si l'anisotropie du cristal est modifiée par la compression :

$$\gamma = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}(1+\beta)\frac{d\ln K_0}{d\ln v} - \frac{\alpha}{2}\frac{d\ln\frac{c_{11}^0 - c_{12}^0}{2}}{d\ln v} + \frac{\alpha+\beta}{2}\frac{d\ln c_{44}^0}{d\ln v}.$$

Vu les valeurs prises par α et β et compte tenu de la discussion du paragraphe suivant, on pourrait essayer, faute de mieux, de remplacer la formule de SLATER par la suivante :

$$\gamma = -\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\frac{d\ln K_0}{d\ln v} - \frac{3}{8}\frac{d\ln \mu_0}{d\ln v}$$

$\mu_0(v)$ module de cisaillement à 0 °K.

Les formules de DUGDALE, MACDONALD et VASHCHENKO reposent donc implicitement sur le fait que souvent μ croît relativement moins vite que K lorsque le taux de compression augmente.

1.3. Le module de rigidité de l'agrégat polycristallin et les constantes d'élasticité des monocristaux.

Il n'existe pas d'approximation bien fondée et d'application suffisamment large pour le calcul de μ en fonction des coefficients d'élasticité isotherme c_{11}, c_{12}, c_{44}. Comme pour un agrégat donné la relation $\mu \quad f(c_{11}, c_{12}, c_{44})$ doit être homogène et du premier degré on pourra utiliser des constantes d'élasticité réduites marquées par un * :

$$\mu^* = \frac{\mu}{K}, \qquad c^* = \frac{c_{44}}{K}, \qquad c'^* = \frac{c_{11} - c_{12}}{2K} \qquad \text{où} \qquad K = -v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T.$$

On sait néanmoins qu'il existe des bornes absolues pour la valeur de μ^* auxquelles sont attachés les noms de Voigt et Reuss (réf. 6). On a :

$$\mu^*_R = \frac{5\,c^*\,c'^*}{2\,c^* + 3\,c'^*} < \mu^* < \mu^*_v = \frac{1}{5}(3\,c^* + 2\,c'^*).$$

Eshelby, Hershey et Kröner (réf. 7) utilisant une idée assez discutable ont obtenu une équation du troisième degré pour la détermination de μ^* :

$$8\,\mu^{*3} + (9 + 4\,c'^*)\,\mu^{*2} - 3\,c^*\,(4\,c'^* + 1)\,\mu^* - 3\,c^*\,c'^* = 0.$$

Ces résultats supposent que toutes les orientations du réseau sont également représentées dans l'agrégat et qu'il y a continuité du déplacement aux frontières de grains.

Le module de cisaillement dont il est question est donc celui qui contrôle la déformation avant que des phénomènes de relaxation aient le temps de se développer. Il est d'ailleurs probable que c'est celui qui présente le plus d'intérêt dans l'étude mécanique des déformations à très grande vitesse (sous choc). On sait pourtant qu'au voisinage du point de fusion, et même assez loin de celui-ci, le module statique se trouve abaissé à cause, en particulier, des glissements visqueux aux joints de grains (réf. 8). Le phénomène est particulièrement net pour le plomb. Le tableau II regroupe pour un certain nombre de métaux cubiques les valeurs expérimentales de $\mu^* c^* c'^*$ et du coefficient de Poisson de l'agrégat $\nu = \dfrac{1 - \frac{2}{3}\mu^*}{2\left(1 + \frac{\mu^*}{3}\right)}$ ainsi que les bornes μ^*_R et μ^*_v et la solution approximative de l'équation de Hershey et Kröner.

On constate que la solution de l'équation de Hershey et Kröner n'est pas toujours placée entre les bornes de Reuss et Voigt qui doivent cependant être considérées comme fermes; même remarque d'ailleurs pour la valeur expérimentale. Le module de cisaillement de l'agrégat est une grandeur assez mal définie et sa mesure ainsi que celle des coefficients d'élasticité des monocristaux sont entachées d'erreurs importantes; la précision ne dépasse pas en général 10 %. Aussi paraît-il sage de situer le module μ^* (μ^* « unrelaxed » de C. Zener) à la moyenne arithmétique ou géométrique de ces deux bornes.

TABLEAU II

d'après des valeurs numériques extraites de (réf. 8), J. FRIEDEL, *Les dislocations* (1956) et C. KITTEL, *Introduction à la physique de l'état solide* (1958)

Métal	c^*	c'^*	μ^*_h	μ^*	μ^*_l	μ^* Hershey et Kröner	ν	$B = \frac{K}{c^*} = \frac{1}{c_{44}}$	$A = \frac{c_{11} - c_{12}}{2\, c_{44}}$
Na	0,63	0,09	0,18	0,57	0,42	0,28	0,26	1,57	0,14
C	0,66 ?	0,11 ?	0,22 ?	1,38 ?	0,44 ?	0,30 ?	0,03 ?	1,52 ?	0,17 ?
Al	0,37	0,30	0,34	0,35	0,34	0,28	0,34	2,70	0,81
Si	0,81	0,52	0,66	0,41	0,69	0,59	0,32	1,24	0,65
Fe α	0,67	0,28	0,43	0,48	0,51	0,41	0,29	1,49	0,41
Ni	0,62	0,24	0,38	0,39	0,47	0,38	0,33	1,60	0,38
Ge	0,89	0,54	0,71	0,81	0,75	0,65	0,18	1,12	0,60
Cu	0,54	0,17	0,29	0,35	0,39	0,30	0,34	1,85	0,32
Ag	0,44	0,15	0,25	0,30	0,32	0,24	0,36	2,29	9,35
Au	0,25	0,09	0,14	0,17	0,19	0,14	0,42	3,98	0,35
Pb	0,33	0,09	0,15	0,13	0,23	0,17	0,44	2,99	0,26
W	0,50	0,50	0,50	0,53	0,50	0,43	0,27	1,99	1
Laiton α	0,58	0,15	0,27	//	0,41	0,29	//	1,71	0,25
Laiton β	0,71	0,08	0,17	//	0,46	0,29	//	1,40	0,11

1.4. CONCLUSION.

La liaison entre le coefficient de GRÜNEISEN et le module de cisaillement μ apparaît comme incomplète à cause de la signification peu microscopique de celui-ci et parce qu'il ne peut remplacer à lui seul les deux modules de cisaillement des monoscritaux cubiques.

Cependant, une formule telle que celle proposée à la fin du paragraphe 1.2 nous paraît physiquement plus satisfaisante que celles précédemment utilisées. Quant à la fonction $\mu(v, T)$ des résultats classiques (cf. en particulier réf. 9) sur les variations linéaires des coefficients d'élasticité avec la température conduisent à la forme $\mu(v,T) = \mu_0(v) + m\,(v)T$, le second terme étant simplement correctif.

Des études théoriques ont déjà été faites sur les variations des $c_{ij\,kl}$ avec la densité (réf. 10, 11) et la mesure de ces coefficients sous hautes pressions est maintenant commencée.

La détermination expérimentale de la vitesse des ondes élastiques derrière un choc permettrait d'obtenir aussi de nouveaux renseignements.

CHAPITRE 2

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE

(Agrégats polycristallins)

2.1. LES VARIABLES D'ÉTAT DE L'AGRÉGAT.

Considérons un échantillon contenant suffisamment de grains pour pouvoir être considéré comme représentatif de l'agrégat [1], et supposons qu'il ait été déformé intensément et d'une manière macroscopiquement [2] homogène. Nous noterons ρ et T la densité macroscopique et la température, quantités dont la définition ne pose pas de problème.

La déformation à l'intérieur des grains n'est cependant pas uniforme à cause de l'existence de défauts (lacunes, interstitiels, dislocations) et des discontinuités de propriétés élastiques aux frontières de grains. Les théories (12) qui visent à déterminer le champ des contraintes locales en considérant chaque grain comme un continu parfait apparaissent même comme criticables car l'accumulation de dislocations sur certaines barrières peut introduire des modifications sensibles.

Nous voudrions définir la déformation élastique de l'agrégat par rapport à un état de référence à mêmes densité et température, doué aussi des mêmes propriétés d'écrouissage, mais caractérisé par un état de pression isotrope. Mais si on décharge l'échantillon soumis à ces cissions (macroscopiques) pour établir cet état de référence, des glissements aux joints de grains et des déformations plastiques locales peuvent se produire. Une déformation globale purement élastique est donc difficile à définir. Une autre approche consiste à mesurer la déformation localement et à effectuer une moyenne. On prendrait comme référence un monocristal de mêmes densité et température que l'agrégat mais dépourvu de défauts et de distorsion. Si au point de coordonnées $\{ x_i \}$ du cristal déformé correspondait le point de coordonnées $\{ a_k \}$ du cristal de référence et que :

$$a_i = x_i - \xi_i$$

la déformation serait définie dans la plus grande partie du volume de chaque grain, c'est-à-dire en tout point suffisamment éloigné d'une imperfection, par le tenseur g_{ij}

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right).$$

---

[1] Nous envisageons seulement le cas où aucune direction n'est privilégiée en ce qui concerne l'orientation et la forme des grains.

[2] Le point de vue macroscopique consiste, en ignorant les grains et leur structure fine, à traiter le métal comme un matériau doué de propriétés variant continûment.

Malheureusement $\{ g_{ij} \}$ n'est pas défini dans une partie, peut-être quelques millièmes, du volume. Remarquons d'autre part que la formule :

$$\int_{(\mathcal{D})} g_{ij}\, dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}\,((\mathcal{D}))} (n_i\, \xi_j + n_j\, \xi_i)\, dS$$

qui traduirait l'équivalence des deux définitions de la déformation reposerait sur l'existence très improbable d'une fonction de déplacement continue dans tout le milieu. La déformation élastique de l'agrégat n'étant donc pas précisément définie, nous croyons illusoire de développer une théorie où des termes du second ordre apparaitraient et nous admettrons qu'il est suffisant de décrire le cisaillement élastique macroscopique du matériau à l'aide d'un tenseur du second ordre (e_{ij}) dont le premier invariant soit nul $(e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0)$ La densité restera alors un paramètre indépendant. En outre, l'écrouissage sera introduit à l'aide de variables d'états scalaires K_i correspondant par exemple aux densités de dislocations, de lacunes, etc., et sera par conséquent considéré comme isotrope. Dans un schéma plus précis il faudrait certainement parler de tenseurs et non de scalaires, mais comme nous nous avançons ici en terrain mouvant — car on peut contester jusqu'à l'idée même de ces variables d'écrouissage — nous estimons cette simplification raisonnable.

Les grandeurs K_i pourront être choisies sans dimension; par exemple si N est une densité de dislocations et b une distance interatomique fondamentale la quantité $\alpha N b^2$ (α constante sans dimension) répondrait à cette exigence.

2.2. Les lois de comportement.

a. La déformation globale en un point, entre les instants t et $t + dt$ est déterminée par le champ des vitesses $\{ v_i \}$; nous supposerons qu'une déformation plastique instantanée se produit en général pendant le même intervalle de temps, à densité constante et en fonction des cissions, et que l'écart entre déformation globale et déformation plastique est comblé par une déformation infinitésimale élastique qui comprend donc la compression (ou dilatation) globale et éventuellement des cisaillements.

Si $u_{ij}dt$, $u^e_{ij}dt$ et $u^p_{ij}dt$ sont respectivement les tenseurs déviateurs des déformations globale, élastique et plastique, le sens que nous avons donné à $\{ e_{ij} \}$ et la précision que nous cherchons à atteindre justifient les relations suivantes :

$$\frac{de_{ij}}{dt} = u^e_{ij} = u_{ij} - u^p_{ij}. \tag{1}$$

b. Loi d'écoulement plastique :

L'hypothèse de conservation de l'isotropie trouve sa forme mathématique quand on exprime que $\{ u^P_{ij} \}$ et le tenseur déviateur des contraintes $\{ S_{ij} \}$ ont mêmes directions principales. Compte tenu de ce que $u^p_{11} + u^p_{22} + u^p_{33} = 0$, on obtient donc :

$$u^p_{ij} = -\frac{2}{3} J^s_2\, \gamma\, (J^s_2, J^s_3, K_i, \rho, T)\, \delta_{ij} + \beta\, (J^s_2, J^s_3, K_i, \rho, T)\, S_{ij} + \gamma\, S_{ik}\, S_{kj}. \tag{2}$$

On se restreindra en pratique à la relation de Levy-Mises (13) (14) (15) [1] :

$$u_{ij}^{p} = \beta\,(J_2^s,\ K_i,\ \rho,\ T)\,S_{ij} \qquad (2\ bis)$$

qui garde d'ailleurs une valeur générale dans les expériences de déformation unidirectionnelle (qui nous intéressent particulièrement) où :

$$S_{22} = S_{33} = -\frac{S_{11}}{2} \qquad S_{12} = S_{23} = S_{31} = 0.$$

Remarque. — On peut penser que, du moins après les premières étapes de la déformation plastique, celle-ci se répartit d'une manière à peu près uniforme dans tous les grains. Car par les empilements de dislocations qui se forment devant les frontières et qui modifient le champ des contraintes, chaque grain contraint ses voisins à se déformer de la même manière que lui. Remarquons que Bishop et Hill (16) (17) sont arrivés par d'autres voies au résultat plus restreint suivant : « le travail fourni dans la déformation plastique est approximativement égal à celui qui serait nécessaire si tous les grains subissaient la même déformation ».

c. **Lois d'écrouissage ou de restauration :**

Elles sont de la forme :

$$K_i = f_i\,(J_2^s,\ J_3^s,\ K_j,\ \rho,\ T) \qquad (3)$$

et doivent être nécessairement incluses pour compléter le schéma.

2.3. Considérations thermodynamiques.

Quoiqu'il s'agisse ici de processus irréversibles, nous adoptons le point de vue thermostatique. C'est-à-dire que nous admettons qu'il existe un potentiel Φ et une entropie S (par unité de masse), fonctions des variables ρ, T, e_{ij}, K_i, correspondant à des états d'équilibre fictifs dans lesquels aucune déformation plastique ne se produirait et que le deuxième principe de la thermodynamique peut être appliqué sous la forme :

$$T\,dS = \delta Q + \delta E^{dis} \qquad (4)$$

δQ = quantité de chaleur transmise au système de l'extérieur.

δE^{dis} = énergie dissipée par unité de masse.

Dans un état où l'écoulement plastique se produit, l'énergie interne et l'entropie [2] ne sont pas exactement les mêmes que dans un état d'équilibre virtuel correspondant. En particulier, il existe une énergie « dynamique » variant avec la vitesse de déformation et qui inclut elle-même un terme potentiel dû à l'accroissement de l'énergie de distorsion autour des dislocations en mouvement et un terme cinétique associé à la propagatoin des configurations atomiques particulières qui entourent ces dernières. Les résultats de la théorie des dislocations laissent

---

[1] Peut-être d'ailleurs insuffisante dans le cas de très grandes vitesses de déformation. Malheureusement, aucun résultat expérimental ne permet jusqu'à présent d'éclairer ce point.

[2] L'entropie restant définie par la relation $S = k\ ln\,\Omega$ où Ω représente le nombre de configurations compatibles avec l'état en question.

cependant penser que ce sont là des différences minimes tant que la vitesse moyenne des dislocations est négligeable par rapport à la vitesse du son.

A partir de (4) on obtient :

$$d\Phi + S\,dT = \frac{p}{\rho^2}d\rho + \frac{1}{\rho}S_{ij}\,u_{ij}\,dt - \delta E^{dis}. \tag{5}$$

θ représentant l'énergie dissipée par unité de temps et de masse, l'équation précédente se modifie comme suit :

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} - \frac{p}{\rho^2}\right)d\rho + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial T} + S\right)dT + \left(\alpha_{ij} - \frac{1}{\rho}S_{ij}\right)u^c_{ij}\,dt\\ &\qquad + \left[\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial K_i}f_i - \frac{1}{\rho}S_{ij}\,u^p_{ij}\right]dt = 0\end{aligned}\right. \tag{5 bis}$$

avec : $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

Ces α_{ij} ne sont d'ailleurs pas des dérivées partielles car la fonction θ n'est définie que sur l'hypersurface $e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0$. Ce sont des coefficients différentiels dont la détermination n'est pas unique.

L'égalité $\frac{\partial\Phi}{\partial T} + S = 0$ c'est-à-dire $\frac{\partial E}{\partial T} = T\frac{\partial T}{\partial S}$ garde son sens; et, puisque (5 *bis*) doit être vérifiée pour toutes les valeurs de $\frac{d\rho}{dt}$ et u^c_{ij} (telles cependant que $u^c_{11} + u^c_{22} + u^c_{33} = 0$) on peut conclure que :

$$\left\{\begin{aligned}&\rho^2\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = p\\ &\alpha_{ij} - \frac{1}{\rho}S_{ij} = \lambda\delta_{ij}\\ &\frac{1}{\rho}S_{ij}\,u^p_{ij} = \theta + \frac{\partial\Phi}{\partial K_i}f_i.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Le paramètre λ apparaît à cause de la condition $u^c_{11} + u^c_{22} + u^c_{33} = 0$ et sera déterminé à l'aide de $S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0$.

A cause de l'hypothèse d'isotropie, θ doit être considéré comme fonction de : $J^c_2 = \frac{1}{2}e_{ij}\,e_{ji}$. La précision recherchée ne justifie pas l'introduction de :

$$J^c_3 = \frac{1}{3}e_{ij}\,e_{jk}\,e_{ki}.$$

On retombe alors sur le résultat classique :

$$\frac{S_{ij}}{\rho} = \frac{\partial\Phi}{\partial J^c_2}e_{ij} = \frac{2\mu}{\rho}e_{ij} \qquad \text{avec} \qquad 2\mu = \rho\frac{\partial\Phi}{\partial J^c_2}. \tag{6 bis}$$

En pratique, on utilisera surtout le modèle à un seul paramètre d'écrouissage fondé sur la forme suivante du potentiel :

$$\Phi = \Phi_0(\rho, T) + \frac{2\mu}{\rho}(K + J^c_2).$$

2.4. Les mécanismes de la déformation plastique et du radoucissement.

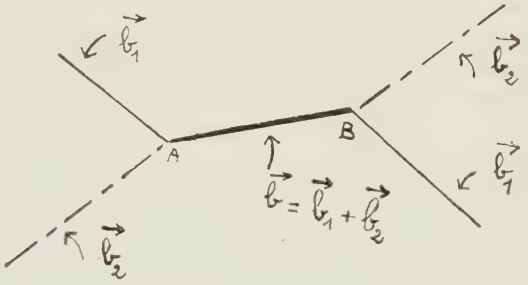
A. *La déformation plastique.*

Elle se fait essentiellement par glissement de dislocations, mouvement qui met en jeu des mécanismes divers :

a. Le saut d'un segment de dislocation entre deux positions de stabilité, avec franchissement de la barrière de Peierls-Nabarro fort peu élevée d'ailleurs dans le cas des métaux CFC;

b. La traversée de régions où les contraintes internes nées de la présence de tous les défauts s'opposent au glissement. Puisqu'il faut déplacer les dislocations sur plusieurs dizaines de distances interatomiques, elle demande un gros apport d'énergie et dès que les cissions appliquées extérieurement descendent au-dessous d'un certain seuil, la probabilité pour que le déficit puisse être comblé par de l'énergie d'origine thermique devient négligeable;

c. L'intersection de deux dislocations douées d'attraction ou de répulsion mutuelle avec formation de crans.



Dans le premier cas, la rencontre des deux dislocations libère d'abord de l'énergie, une liaison, segment de dislocation AB indiqué sur la figure ci-contre, s'établissant entre elles. La rupture d'un tel lien demande des cissions locales importantes que les fluctuations de l'énergie thermique (ainsi qu'en *b*) ne peuvent suppléer que dans une très faible mesure. Parfois, les contraintes nécessaires à la réduction de la liaison suffisent à libérer l'énergie de formation du cran. Ce n'est pas vrai dans le second cas où le rapprochement des dislocations suppose aussi des forces notables quoiqu'en général plus faibles (réf. 18). [Il n'y a pas à restituer l'énergie dissipée à la formation d'une jonction].

d. La montée de crans qui entravent le glissement avec production (activée) de lacunes ou d'interstitiels.

Il faut ajouter que les dislocations en mouvement sont douées d'une énergie supplémentaire, fonction de la vitesse de glissement, propre à faciliter les mécanismes précédents. On conçoit donc que lorsqu'un échantillon est déformé à une certaine vitesse, quelques-unes des opérations que nous avons décrites se font sans retard à cause de la présence d'une source suffisante d'énergie (de déformation élastique du réseau) tandis qu'ici et là les mécanismes se trouvent bloqués en l'attente d'une concentration d'énergie thermique ou d'une modification favorable des contraintes locales causée par des glissements de dislocations voisines. Autre-

ment dit et par exemple, une intersection commence une chaîne plus ou moins longue d'opérations qui s'arrête et ne repart qu'avec l'aide de fluctuations thermiques. L'expérience tend à montrer que les processus décisifs [1] sont ceux qui ont été indiqués ci-dessus en b et c mais il est probable que seules les intersections sont suffisamment localisées pour être sujettes à activation.

Notons aussi que pour obtenir de très grandes vitesses de déformation (u) il ne faut accroître que légèrement (par rapport à ce qu'on appelle communément la limite d'écoulement) la tension appliquée. Pour préciser ce point il est bon de donner quelques précisions supplémentaires sur :

α. La cinétique du glissement sur un plan libre d'obstacles (ni intersections, ni impuretés, ni crans).

L'énergie de l'unité de longueur d'une dislocation en mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$\Gamma = \frac{\Gamma_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}}$$

Γ_0 énergie au repos ;
a vitesse limite de propagation, inférieure à la vitesse des ondes sonores transversales ;
v vitesse de glissement.

Pendant le glissement, une partie seulement du travail fourni au milieu cristallin sert à accélérer la dislocations. Le franchissement de la barrière de Peierls-Nabarro, les échanges de chaleur entre parties comprimées et dilatées, les interactions avec les phonons, dissipent de l'énergie quoique en assez petite quantité tant que le rapport $\frac{v}{a}$ reste nettement inférieur à 1 (réf. 19, 20). L'ébranlement inévitable de vibrations désordonnées dont la longueur d'onde est au départ de l'ordre de la distance inter-dislocations et qui dégénèrent par anharmonicité en pure énergie thermique, détourne probablement un pourcentage notable de l'énergie disponible. Désirant simplement obtenir quelques chiffres approchés, nous négligerons tous ces phénomènes. Nous aurons donc :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = Sbv$$

où S est la composante adéquate des contraintes locales [2].

Supposons qu'une scission S constante soit appliquée à l'instant 0 à une dislocation alors immobile. Utilisant des variables réduites :

$$\frac{x}{b} = x^* \qquad \frac{v}{a} = v^* \qquad \Gamma^*_0 = \frac{\Gamma_0}{\mu b^2} \qquad \Gamma^* = \frac{\Gamma}{\mu b^2} \qquad S^* = \frac{S}{\mu}$$

---

[1] Dans les expériences de compression dynamique « moyenne » la déformation est rapide et la température reste à chaque densité nettement inférieure à celle de fusion $\left(\frac{T}{T_f} < \frac{1}{2}\right)$. Ceci nous permettra de négliger les phénomènes de diffusion *au prix d'une limitation stricte du domaine de validité de nos résultats.*

[2] La tension notée S dans le texte représente en général, quand il est question de dislocations, la composante de la scission appliquée sur le plan de glissement dans la direction du vecteur de Burgers $\vec{b}$ (de grandeur b).

et le paramètre α tel que $v^* = \sin\alpha$, on exprime aisément le temps et la distance parcourue :

$$t = \frac{b}{c}\frac{\Gamma_0^*}{S^*}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$x^* = \frac{\Gamma_0^*}{S^*}\left[\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha} - 1\right].$$

De plus :

$$\Gamma^* = \Gamma_0^*\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

D'où en particulier :

$$S^* x^* = \Gamma^* - \Gamma_0^* \qquad t = \frac{x}{c}\sqrt{\frac{\Gamma^* + \Gamma_0^*}{\Gamma^* - \Gamma_0^*}}.$$

β. L'intersection de deux dislocations.

On a pu estimer dans divers cas les cissions moyennes nécessaires à une intersection non activée (réf. 18). Les critères se présentent sous la forme :

$$l^* S^* = r \quad \begin{cases} l^* = \dfrac{l}{b} & \text{distance réduite moyenne entre dislocations} \\ S^* = \dfrac{S}{\mu} & \text{scission réduite.} \end{cases}$$

Le nombre r est voisin de l'unité quoique en général inférieur. Il prend ses plus grandes valeurs pour des dislocations douées d'attraction mutuelle ou largement dissociées car l'énergie de formation du cran $\left(\simeq \dfrac{1}{30}\,\mu b^2 d \text{ pour } d \geqslant b\right)$ croît avec la largeur d de la faute [1] (réf. 19). L'énergie U mise en jeu dans l'intersection et dont la plus grande partie se trouve parfois requise par le rapprochement des dislocations ou la dissociation de la liaison s'exprime en fonction de μb^3. La quantité réduite $U^* = \dfrac{U}{\mu b^3}$ est de l'ordre de l'unité, nettement inférieure à 1 en l'absence d'attraction ou de répulsion.

D'autre part, si au bout d'une course x^*, une dislocation doit en croiser une autre, elle la traversera probablement sans difficulté si l'énergie du mouvement sur quelques distances interatomiques est suffisante. C'est-à-dire d'après les résultats exposés précédemment :

$$(\Gamma - \Gamma_0) \simeq r'\mu b^2 \qquad \text{soit} \qquad x^* S^* = \Gamma^* - \Gamma_0^* \simeq r' \qquad (r \simeq r' \simeq 1)$$

On constate donc qu'un accroissement de la tension réduite de l'ordre de $\dfrac{r}{l^*}$ (au-dessus de la limite élastique réduite, elle-même voisine de $\dfrac{r}{l^*}$ devrait suffire

---

[1] En l'absence de toute autre contrainte d se calcule en écrivant que la répulsion entre les deux dislocations imparfaites qui bordent la faute équilibre la force d'attraction due à l'énergie de faute (f) ; on obtient $d_0 = \lambda\dfrac{\mu b^2}{f}$ (λ paramètre sans dimension).

à rendre inutile l'apport d'énergie thermique dans la plupart des intersections et par conséquent à obtenir de très grandes vitesses de déformations (u). Celles-ci peuvent être alors évaluées à partir de la relation $u = Nvb$, N étant la densité de dislocations mobiles, v la vitesse moyenne de glissement alors égale à quelques centièmes de a. Ceci conduit à des vitesses déjà considérables de l'ordre de 10^{-4} N $\sim 10^4$ ou 10^5. Ces prévisions sont vérifiées expérimentalement : la tension appliquée ne croît que d'environ $\frac{\mu}{1\,000}$ lorsque la vitesse de déformation passe de 10^{-5} à 10^3 (réf. 21).

B. *La restauration.*

Les mécanismes responsables pourraient être la déviation et la montée des dislocations. Ils permettent l'annihilation de certaines d'entre elles et la réorganisation du réseau en une structure d'énergie moindre.

a. La déviation d'une portion de dislocation-vis d'un plan de glissement dans un autre (réf. 19).

Les dislocations étant dissociées, cette opération exige une recombinaison locale par pincement et quel que soit l'état des contraintes un apport d'énergie thermique supérieur à $\frac{1}{10}\mu b^2 d$. En effet, aucune énergie de déformation élastique n'est récupérable dans le rapprochement en un point de deux imparfaites à moins que, la dislocation étant animée d'une certaine vitesse et butant contre un obstacle, une part de l'énergie de mouvement ne soit disponible. Ceci n'est d'ailleurs pas contradictoire avec la diminution de l'énergie d'activation sous l'effet de certaines cissions favorables à la déviation ou au rétrécissement de la dislocation. En l'absence de contraintes sa largeur est égale à d^0 et peut se trouver réduite à $d < d_0$ dans certaines situations, en particulier en tête d'empilement.

Soit f l'énergie de la faute (par unité de surface), cette contraction demande des cissions locales S dirigées dans le sens de la dislocation et telles que :

$$\frac{d}{d_0} \simeq \frac{f}{f + S\,b}.$$

Dans les déformations à grande vitesse qui nous intéressent, les phénomènes de déviation doivent être pris en compte si leur fréquence ν atteint 10^4 (ou, à l'intérieur des chocs, 10^8). Or, $\nu \simeq \nu_a e^{-\frac{U}{kT}}$ où ν_a est la fréquence des vibrations atomiques et U l'énergie d'actviation. Par conséquent, aux fréquences que nous venons de mentionner, correspondent des valeurs de U voisines respectivement de 20 kT et 10 kT. L'expérience montre que des cissions moyennes $\left(\simeq \frac{\mu}{100}\right)$ permettent des déviations en nombre appréciable, mais l'incertitude sur l'énergie de pincement rend difficile une estimation théorique précise. Remarquons toutefois que là où les déviations seraient faciles (tête d'empilement) des obstacles risqueraient d'arrêter le glissement consécutif.

b. La montée des dislocations (réf. 19).

Elle se fait essentiellement par la montée des crans et la vitesse de montée (v) d'une dislocation est fixée par une relation du type $v = v_c \gamma_c$, v_c représentant la

vitesse de déplacement des crans et γ_c leur concentration (égale à $\frac{b}{x}$ si x est la distance moyenne entre crans situés sur la ligne).

La vitesse v_c peut être considérée comme la différence des deux vitesses associées à la montée ou à la descente du cran. Les mécanismes mis en cause sont d'une part l'émission d'une lacune et la capture d'un interstitiel, d'autre part l'émission d'un interstitiel et la capture d'une lacune. Selon qu'il s'agit d'émission ou de capture la contribution à v_c est un terme de la forme $b\nu_a e^{-\frac{U - S b^3}{kT}}$ (U énergie d'autodiffusion du défaut ponctuel, lacune ou ingerstituel) ou $b\gamma\nu_a e^{-\frac{U_d}{kT}}$ (γ concentration du défaut, U_d énergie d'activation pour son déplacement).

Dans les déformations à très grande vitesse, ces phénomènes ne seraient importants que si $v \simeq 10^6 b$. Il faudrait donc, chose invraisemblable, que l'un ou l'autre des produits $\gamma_c e^{-\frac{U - S b^3}{kT}}$ $\gamma_c \gamma e^{-\frac{U d}{kT}}$ ne soit pas inférieur à 10^{-7}. Nous négligerons donc les phènomènes de montée (cf. note p. 26).

C. *La variation de la limite élastique avec la déformation lorsqu'il n'y a pas de restauration.*

Dans le cas des métaux CFC et tant qu'il n'y a pas réorganisation des dislocations (en particulier par les mécanismes de déviation), les expériences effectuées dans les conditions habituelles montrent que limite d'écoulement et déformation sont approximativement proportionnelles. Les schémas théoriques les plus plausibles conduisant à ce résultat se présentent en général de la façon suivante :

On suppose qu'il existe des empilements (lignes de glissement) de longueur l constitués d'un nombre moyen n de dislocations; l'expérience montre que n ne varie pas beaucoup pendant l'écrouissage. La limite d'écoulement S_e est considérée comme déterminée par le champ des contraintes internes, opposées aux tensions appliquées, et par la résistance des liaisons entre dislocations. Son expression en fonction de la longueur des lignes de glissement est du type $S_e = \frac{k\mu b}{l}$ (ou sous forme réduite $S_e^* = \frac{k}{l^*}$). Le paramètre k tient compte du fait que les contraintes engendrées par les n dislocations se trouvent en partie compensées par le nuage de dislocations qui se forme au voisinage de l'empilement.

Par conséquent, si à un instant donné de la déformation, alors que les lignes de glissement ont la longueur l, dq sources par unité de volume émettent des ensembles de n boucles de surface moyenne l^2 on aura :

$$de_p = nl^2 b\, dq.$$

Il en résultera un accroissement de la longueur totale des lignes de glissement :

$$d\left(\frac{1}{l^2}\right) \simeq l dq$$

et un accroissement de la limite d'écoulement :

$$dS_e = kb\mu\, d\left(\frac{1}{l}\right) \simeq kb\mu\, l^2\, dq = \frac{k}{n}\mu\, de_p$$

d'où une relation :

$$\frac{d\,S_e}{d\,e_p} = \frac{k}{n}\,\mu.$$

Pour un agrégat polycristallin et pour les déformations usuelles n et $\frac{k}{n}$ se situent respectivement au voisinage de 20 et de $\frac{1}{40}$. Selon un modèle de ce type, la densité des dislocations (N) croît comme le carré de la déformation.

On pense que l'effet des déviations (qui se produisent pour des cissions élevées) est de limiter la diminution de longueur des lignes de glissement en leur permettant de se rejoindre. Fixer l constant, comme cela avait été fait par G. I. Taylor, entraîne la relation parabolique classique entre tension et déformation. Celle-ci croît alors linéairement avec la densité des dislocations (N).

D. *Discussion.*

Les vitesses de déformation que nous rencontrons sont en général supérieures à 10^4.Il n'y a pas de différence essentielle entre déformation ordinaire et déformation à l'intérieur d'un choc. Mais l'épaisseur δ de celui-ci — et par conséquent $\frac{1}{u}$ — est d'autant plus faible que la différence de pression entre milieux amont et aval est plus grande. Pour des chocs atteignant quelques centaines de milliers d'atmosphères, l'expérience a montré que δ était inférieure au dixième de millimètre. D'où $u > 10^7$. La relation $u \simeq \mathrm{N}bv \simeq \frac{\mathrm{N}}{100}\frac{v}{c}$ montre clairement qu'à un état d'écrouissage donné (N fixé) correspond une vitesse limite de déformation mais des u aussi grandes que 10^8 n'exigent finalement que des densités assez ordinaires de dislocations. (Nous verrons d'ailleurs plus loin que pour des chocs si intenses les cissions $\left(> \frac{\mu}{10}\right)$ permettent la formation spontanée de nouvelles boucles de dislocations).

Il est d'autre part très probable que des vitesses voisines de $\frac{\mathrm{N}}{1\,000}$ peuvent être produites par l'application de cissions inférieures à $\frac{\mu}{10}$.

Pour des u inférieures à 10^6 (cas général des déformations en l'absence de chocs), la fréquence de processus thermoactivés que nous appellerons « intersections » semble régir la déformation. Les résultats de Lindholm (réf. 12), valables pour $T \gtrsim 300^\circ K$, montrent une transition vers $u \gtrsim 10^{-3}$ (cf. fig. 4, 5), peut-être différente de celle qui avait été observée par d'autres auteurs vers 150°K (réf. 22). Dans un certain domaine de vitesses de déformation et de température où nous nous plaçons, un seul mécanisme thermoactivé apparaît toutefois prépondérant.

Alors que toute restauration par montée de dislocations peut être négligée, on hésite sur l'importance du rôle des déviations. Des expériences récentes de compression à vitesse constante (réf. 21) démontrent clairement que pour des u voisines de 10^3 le revenu reste notable, surtout dans le cas de l'aluminium, tandis que pour le cuivre la courbe pression vraie-déformation vraie garde sensiblement la pente $\frac{\mu}{40}$ jusqu'à des déformations plastiques e_p de l'ordre de 0,20 (cf. fig. 6, 7).

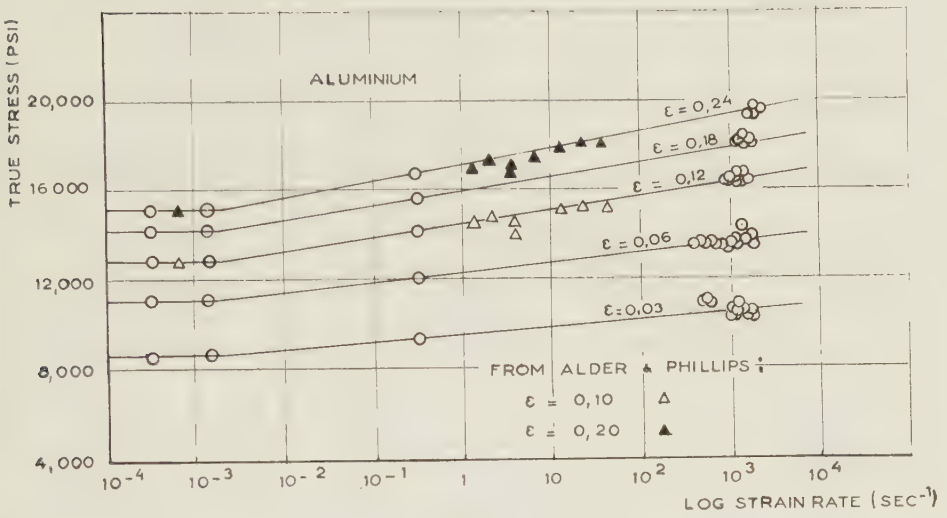

ALUMINIUM
TRUE STRESS (PSI)
20,000
16 000
12,000
8,000
4,000
ε = 0,24
ε = 0,18
ε = 0,12
ε = 0,06
ε=0,03
FROM ALDER & PHILLIPS :
ε = 0,10
ε = 0,20
10-4
10-3
10-2
10-1
1
10
10 2
10 3
10 4
LOG STRAIN RATE (SEC-1)

FIG. 4

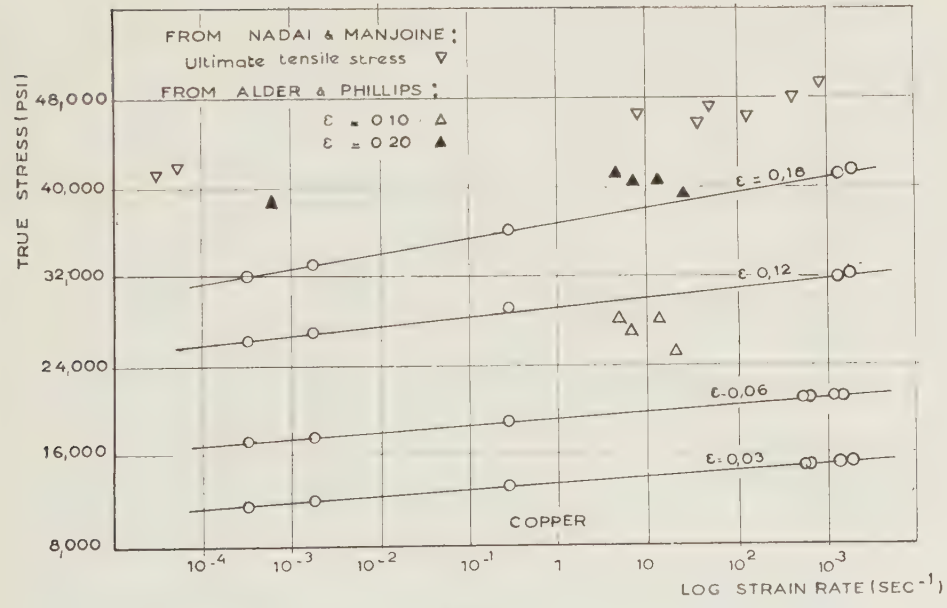

FROM NADAI & MANJOINE :
Ultimate tensile stress
FROM ALDER & PHILLIPS :
ε = 0 10
ε = 0 20
TRUE STRESS (PSI)
48,000
40,000
32,000
24,000
16,000
8,000
ε = 0,18
ε 0,12
ε 0,06
ε 0,03
COPPER
10-4
10-3
10-2
10-1
1
10
10 2
10-3
LOG STRAIN RATE (SEC-1)

FIG. 5

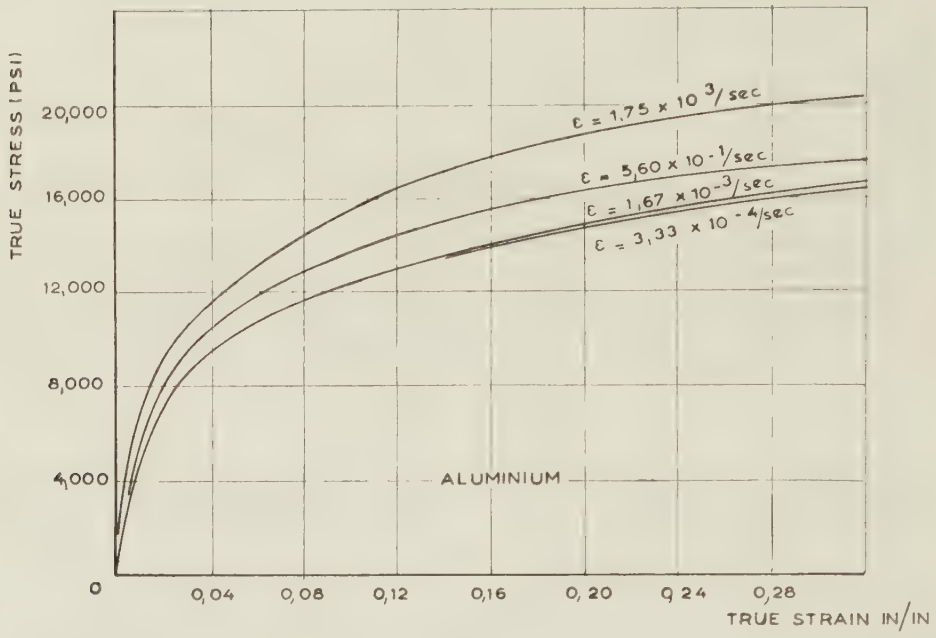

TRUE STRESS (PSI)
20,000
16,000
12,000
8,000
4,000
0
ε = 1,75 x 10 3/sec
ε = 5,60 x 10 -1/sec
ε = 1,67 x 10 -3/sec
ε = 3,33 x 10 - 4/sec
ALUMINIUM
0,04
0,08
0,12
0,16
0,20
0,24
0,28
TRUE STRAIN IN/IN

FIG. 6

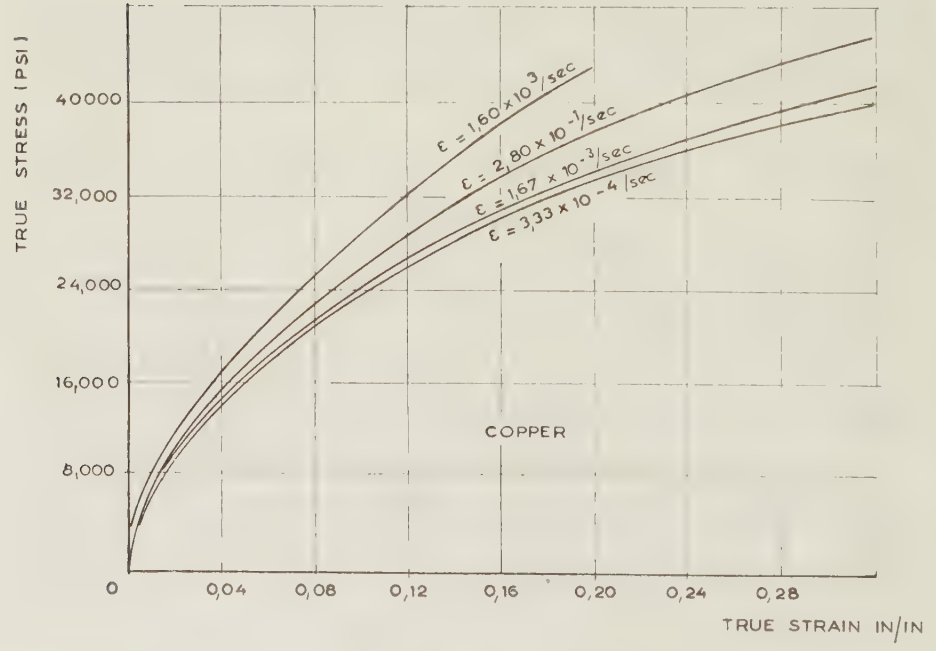

TRUE STRESS (PSI)
40000
32,000
24,000
16,000
8,000
0
ε = 1,60 x 10 3/sec
ε = 2,80 x 10 -1/sec
ε = 1,67 x 10 -3/sec
ε = 3,33 x 10 -4 /sec
COPPER
0,04
0,08
0,12
0,16
0,20
0,24
0,28
TRUE STRAIN IN/IN

FIG. 7

On constate que le revenu est loin d'être complet parce qu'à e_p donné le coefficient de proportionnalité entre S et log u est supérieur à celui qui a été mesuré à écrouissage constant par d'autres auteurs (réf. 18). Au cours d'expériences analogues sur aluminium, DORN et HAUSER (réf. 23) ont d'autre part observé une modification de l'allure des courbes pression-déformation pour des u de l'ordre de 10^4. A ce niveau l'augmentation de u s'accompagne d'une montée plus rapide de la pression imposée à l'échantillon. Les auteurs attribuent cette circonstance au fait que la vitesse des dislocations est limitée; on peut cependant imaginer une autre explication : la vitesse de revenu ne pourrait suivre la vitesse de déformation, la première croissant peut être avec la cission comme $e^{\frac{A}{B+CS}}$ la seconde comme $e^{A'S}$. Il en résulterait un écrouissage résiduel plus important, d'où la nécessité de pressions plus élevées. Nous conclurons donc que si l'énergie de faute f du métal est faible (Cu et Ag), on est tenté d'ignorer les phénomènes de revenu mais qu'un doute subsiste dans les autres cas.

2.5. *La forme des modèles mathématiques et la notion d'états correspondants.*

Les mécanismes dont il a été question ci-dessus ne peuvent jouer que si une certaine quantité d'énergie est disponible localement pour franchir la barrière de potentiel caractéristique de la « réaction» .

Il se peut que l'énergie de déformation élastique locale soit suffisamment grande pour jouer le rôle de fournisseur, sinon le mécanisme ne jouera que grâce à la concentration momentanée d'énergie thermique.

On peut admettre, à titre d'hypothèse fondamentale, qu'étant donné un état de contrainte, les mécanismes pour lesquels la première proposition est généralement vraie peuvent se produire si rapidement qu'ils n'ont pas d'effet notable sur les vitesses de déformation plastique et de revenu, et que ces dernières se trouvent par contre limitées et déterminées par la fréquence des mécanismes thermoactivés. (On ignore ainsi le cas extrême — que l'on rencontre peut-être dans l'étude de la structure des chocs intenses — où la vitesse même de glissement des dislocations joue un rôle essentiel).

Dans le cas présent [1], ces mécanismes seront, d'une part, les intersections, d'autre part, la déviation de dislocations vis. Nous ne croyons pas que pour un métal donné on puisse établir un schéma simple valable dans tout le domaine des densités et des températures et quelle que soit la grandeur des composantes du tenseur déviateur des contraintes. Mais dans un domaine limité comme le nôtre, il peut apparaître que un, deux ou trois mécanismes jouent un rôle prépondérant et suffisent à rendre compte des phénomènes observés.

Les schémas les plus simples que l'on puisse concevoir contiennent un seul paramètre d'écrouissage qu'il est naturel d'assimiler à la densité N des dislocations à cause de l'importance prépondérante de ce paramètre [2] [Réf. 18, p. 150, fig. 5.29].

---

(1) Cf. note p. 26 et la discussion p. 29.

(2) La densité des dislocations étant par définition le nombre de dislocations qui traversent un élément de surface unité.

Ces schémas sont du type :

(1) $u_{11} = f[S_{11}, N ; \rho, T]$ u_{ij} tenseur déviateur de la vitesse de déformation

(2) $\dot{N} = g[S_{11}, N ; \rho, T]$ S_{ij} tenseur déviateur des contraintes

pour un écoulement monodimensionnel.

Admettons qu'un seul mécanisme thermoactivé soit responsable de la déformation plastique et qu'il la bloque à un instant quelconque en $\mathfrak{N}$ sites (par unité de volume). Si Pdt est la probabilité pour que l'un des mécanismes joue pendant l'intervalle de temps dt et si son déclenchement permet une déformation plastique de l'unité de volume δ_{11}, u_{11} s'exprimera par :

$$u_{11} = \mathfrak{N}\, P\, \delta_{11} \tag{3}$$

(δ_{11} a la dimension d'un volume).

D'autre part, des formules du type :

$$\mathfrak{N} = k_1 N \sqrt{N} \tag{4}$$

$$\delta_{11} = \frac{k_2 b}{N} \tag{5}$$

(k_1 et k_2 constantes sans dimension)

apparaissent plausibles.

La première se justifie par l'analyse dimensionnelle et la seconde en considérant que si une dislocation balaie une surface dS, elle produit une déformation du volume unité proportionnelle à bdS.

Quant à la probabilité P, elle est de la forme :

$$P = \nu\, e^{-\frac{U}{kT}} \tag{A}$$

(k constante de Boltzmann).

où ν est une fréquence caractéristique, indépendante de la température, reliée à celle des vibrations atomiques (νa), en général beaucoup plus petite parce que le mécanisme en question met en jeu des mouvements d'atomes sur plusieurs longueurs atomiques, donc des vibrations de longueur d'onde beaucoup plus grande que b.

Cette forme ne convient probablement pas lorsque le mécanisme peut jouer dans deux sens opposés. Il serait alors plus correct d'écrire :

$$P = \nu' \left(e^{-\frac{U'}{kT}} - e^{-\frac{U''}{kT'}} \right). \tag{B}$$

Les relations du type (A) ou (B) n'ont pas de démonstration rigoureuse et elles ne sont certainement qu'approchées. Leur sens réside surtout dans les indications

qu'elles donnent sur l'influence de la température, toutes choses égales par ailleurs. De ce point de vue l'expérience justifie leur emploi.

Il est commode d'introduire comme paramètre d'écrouissage la quantité :

$$S_{11} = \alpha \mu b \sqrt{N} \tag{6}$$

(α constante sans dimension) qui correspond à la contrainte interne moyenne engendrée par le réseau de dislocations [1].

m représentant la masse d'un atome du métal considéré, l'état physique de l'échantillon est alors caractérisé par les seules grandeurs m b $\overline{S_{11}}$, S_{11}, μ et T [2]. Peut-être faudrait-il ajouter l'énergie de faute f. Une fréquence indépendante de T aura donc obligatoirement la forme :

$$\nu = \sqrt{\frac{\mu b}{m}}\, \varphi\left(\frac{S_{11}}{\mu}, \frac{S_{11}}{\mu}\right) \tag{7}$$

les variations en fonction de $\frac{S_{11}}{\mu}$ étant probablement négligeables)

et l'énergie d'activation s'écrira :

$$U = \mu b^3 \psi\left(\frac{\overline{S_{11}}}{\mu}, \frac{S_{11}}{\mu}\right) \tag{8}$$

(Remarquons ici pour la première fois qu'une telle expression implique un rapport $\frac{f}{\mu b}$ constant).

On obtient donc finalement dans l'hypothèse (A) :

$$u_{11} = K \sqrt{\frac{\mu b}{m}} \frac{\overline{S_{11}}}{\mu} \varphi\left(\frac{\overline{S_{11}}}{\mu}\right) e^{\frac{\mu b^3}{kT} \psi\left(\frac{\overline{S_{11}}}{\mu}, \frac{S_{11}}{\mu}\right)}. \tag{9}$$

Dans le cas des intersections, on pourra essayer : [3]

$$\begin{cases} u_{11} = K \sqrt{\frac{\mu b}{m}} \left(\frac{\overline{S_{11}}}{\mu}\right)^2 e^{-\frac{\mu b^3}{kT}\left(\alpha'' - \alpha''' \frac{S_{11}}{\overline{S_{11}}}\right)} \\ \varphi = \alpha' \frac{\overline{S_{11}}}{\mu} \\ U = \mu b^3 \left(\alpha'' - \alpha''' \frac{S_{11}}{\overline{S_{11}}}\right). \end{cases}$$

---

[1] L'énergie de distorsion emmagasinée durant l'écrouissage dans un volume unité s'écrirait :

$$W = w \mu b^2 N = w' \frac{\overline{S_{11}^2}}{\mu}$$

(w w' constantes sans dimension)

Cependant l'énergie par unité de longueur de dislocation diminue quand N augmente; ce qu'on néglige ici.

[2] Et certainement aussi par la pression dont nous ne parlons pas ici pour simplifier l'exposé; cf. Annexe 2.

[3] Au cours même de l'intersection une certaine quantité d'énergie de déformation élastique est libérée, proportionnelle à la contrainte appliquée et à la distance entre les points d'ancrage. On admet ici qu'un pourcentage fixe de cette énergie peut servir à la formation du cran, d'où l'expression de U.

L'emploi de variables réduites sans dimension (marquées d'astérisques) s'impose; il permettra l'extrapolation des résultats dans le domaine des hautes pressions et des hautes températures si le mécanisme étudié continue à contrôler la vitesse de réaction.

$$S^*_{11} = \frac{S_{11}}{\mu} \qquad \overline{S^*_{11}} = \frac{\overline{S_{11}}}{\mu} \qquad T^* = \frac{kT}{\mu b^3} \tag{10}$$

$$u_{11} = \sqrt{\frac{\mu b}{m}}\,\Phi\,(\overline{S^*_{11}})\; e^{-\frac{1}{T^*}\psi\,(\overline{S}^*_{11},\, S^*_{11})}. \tag{11}$$

(D'une manière plus générale, l'énergie d'activation ψ peut être mise, au second ordre près en $\overline{S^*_{11}}$, S^*_{11} sous la forme :

$$\psi = \psi_0 + a\overline{S}^*_{11} - bS^*_{11}. \tag{12}$$

Il est raisonnable de définir la limite d'écoulement S^*_{11} comme la valeur de S^*_{11} qui correspond à la plus petite vitesse de déformation observable (u^0_{11}). Car il est extrêmement difficile dans un cas donné de décider expérimentalement s'il y a écoulement ou non. En pratique on pourra prendre pour u^0_{11} n'importe quelle vitesse très petite mais effectivement mesurable.

L'équation qui détermine la limite d'écoulement est alors :

$$u^0_{11} = \sqrt{\frac{\mu b}{m}}\,\Phi\,(\overline{S}^*_{11})\; e^{-\frac{1}{T^*}\,(\psi_0 + a\overline{S}^*_{11} - b\overline{S}^*_{11})} \tag{13}$$

Pour un écrouissage donné la limite d'écoulement apparaît fonction linéaire de la température; effectivement l'expérience montre que dans de nombreux cas la courbe $\overline{\overline{S^*_{11}}}$ (T) est constituée de segments de droites reliés entre eux par des arcs. Ces arcs de transition correspondraient aux domaines de température où deux mécanismes de déformation se trouvent en concurrence.)

Revenons maintenant à l'équation (2) qui doit traduire dans le langage mathématique les phénomènes d'écrouissage et de restauration. En général la multiplication des dislocations et le revenu par disparition ou regroupement de celles-ci dépendent de processus physiques différents. Le premier pourrait être par exemple l'opération de sources de Frank et Read, plus généralement la formation de boucles à partir d'obstacles (un dipôle peut se former à partir d'un cran suffisamment haut et s'ouvrir en boucle), et le second la déviation de dislocations vis d'un plan de glissement dans un autre. Nous traduirons cette distinction en écrivant :

$$N = g_1\,(S_{11},\ N\,;\ \rho,\ T) - g_2\,(S_{11},\ N\,;\ \rho,\ T).$$

Mais la formation des boucles et la réorganisation du réseau des dislocations dépendent complètement ou partiellement du mécanisme même que nous avons supposé essentiel dans l'étude de la vitesse de déformation : l'intersection. Il exerce probablement un contrôle total sur la vitesse d'écrouissage d'où une fonction g_1 du type $g_1 = K'NP$.

$$\left[\text{avec} \qquad P = \alpha' \sqrt{\frac{\mu b}{m}}\,\overline{S}^*_{11}\, e^{-\frac{1}{T^*}\left(\alpha'' - \alpha'''\frac{S^*_{11}}{\overline{S}^*_{11}}\right)}\right].$$

Admettons d'autre part qu'une opération élémentaire de restauration se compose d'une déviation et du rapprochement consécutif de deux arcs de dislocation accompagné de quelques intersections (en nombre moyen r). La durée moyenne de cet ensemble de phénomènes sera donc égale à $\frac{1}{P'} + \frac{r}{P}$, P' représentant la probabilité par unité de temps d'une déviation. On écrira donc [1] :

$$g_2 = K'' N \frac{PP'}{P + rP'}.$$

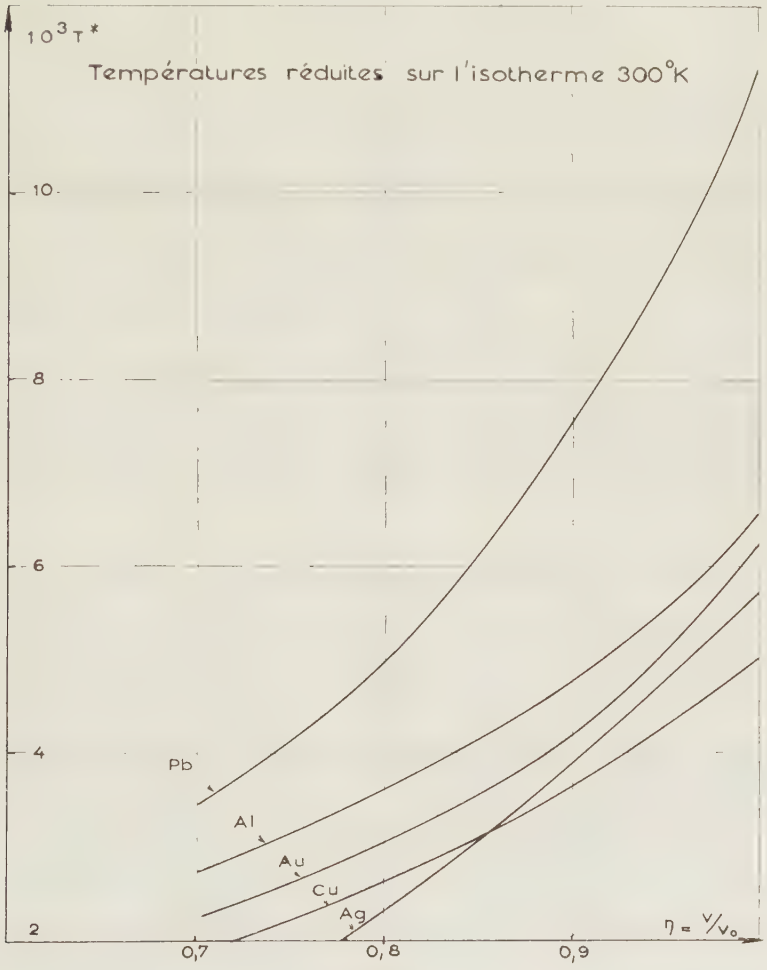


FIG. 8

Si pour les états condensés du métal le rapport entre μb et l'énergie de faute (f)

[1] Si le réseau des dislocations garde la même structure pendant l'écrouissage, en dépit des variations de leur densité, le paramètre r peut bien être choisi constant, indépendant de N.

reste constant, P′ ne dépend que de $\bar{S}^*_{11}$, S^*_{11}, $\sqrt{\frac{\mu b}{m}}$ et T^*. Peut-être pourrait-on essayer l'expression simple [1] :

$$P' = a\sqrt{\frac{\mu b}{m}}\, e^{-\frac{a'}{T^*}\frac{1}{a''+\bar{S}^*_{11}}}.$$

Compte tenu de l'hypothèse restrictive sur l'énergie de faute, toutes les considérations précédentes expliquent la proposition suivante :

Proposition sur les états correspondants : « Les quantités $\frac{u_{11}}{\sqrt{\frac{\mu b}{m}}}$ et $\frac{\dot{N}}{N\sqrt{\frac{\mu b}{m}}}$ sont des fonctions des variables réduites $\overline{S^*_{11}}$ S^*_{11} et T^* ». Cette proposition est de même nature que la loi de Lindemann utile en théorie de la fusion [2]. Grâce à elle on peut estimer le comportement d'un métal sous hautes pressions et hautes températures en considérant un état équivalent plus facilement accessible expérimentalement, par exemple un état non comprimé. Car si un mécanisme est prépondérant dans un certain domaine il le sera aussi dans tous les domaines « correspondants ».

Les figures 2, 8, 9, 10 indiquent comment la température de Debye θ — et par conséquent $v_a \simeq \sqrt{\frac{\mu b}{m}}$ — les températures réduites sur l'isotherme 300 °K et l'adiabatique d'Hugoniot, le coefficient de Lamé varient avec la densité. On peut ainsi comprendre théoriquement pourquoi la limite élastique croît avec la pression et même effectuer des prévisions quantitatives en s'aidant de la relation (13).

Remarques.

1. Nous avons fait une approximation particulière en admettant que μ suffit à décrire les propriétés élastiques du métal; en fait μ, $\chi^{-1} = -v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$ et les coefficients d'élasticité des monocristaux varient parallèlement sans conserver exactement entre eux des rapports fixes. Nous avons aussi négligé la pression.

2. En se limitant aux déformations plastiques effectuées à densité et température constantes, on obtient le couple d'équations :

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{de^p_{11}}{dt} = u_{11} = A\bar{S}^2_{11}\, e^{a\frac{S_{11}}{\bar{S}_{11}}} \\ \dfrac{d\bar{S}_{11}}{dt} = A'\bar{S}^2_{11}\, e^{a\frac{S_{11}}{\bar{S}_{11}}} - A''\bar{S}^2_{11}\, e^{a\frac{S_{11}}{\bar{S}_{11}}}\dfrac{P'}{P+rP'} \end{cases}$$

et par conséquent :

$$\frac{d\bar{S}_{11}}{de^p_{11}} = \frac{A'}{A} - \frac{A''}{A}\frac{P'}{P+rP'}\left(\text{avec } P = \alpha\bar{S}_{11}\, e^{a\frac{S_{11}}{\bar{S}_{11}}}\right).$$

---

1) Cf. paragraphe 2.4 B.

2) Dans notre langage cette loi s'énoncerait en fait : « la température réduite de fusion est constante ».

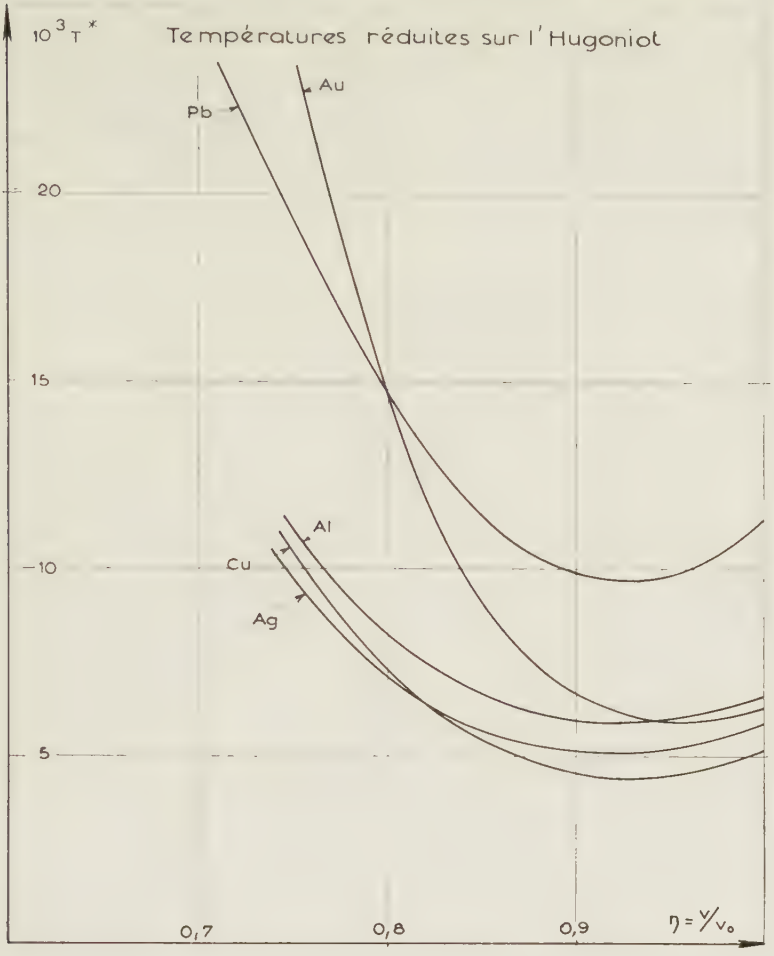


FIG. 9

On constate d'abord qu'en l'absence de revenu la déformation plastique et $\overline{S_{11}}$ (donc $\sqrt{\overline{N}}$) croissent proportionnellement et si l'on confronte la relation précédente et les courbes expérimentales classiques tension-déformation, on est conduit à penser que lorsque $\overline{S_{11}}$ (et par conséquent S_{11}) dépasse un certain seuil, P devient petit par rapport à P', $\frac{d\bar{S}_{11}}{de''_{11}}$ à peu près constant (et en particulier insensible à la vitesse de déformation $[u_{11}]$).

3. Les raisonnements précédents conduisent à des formules dont la valeur réside surtout dans un bon accord avec les résultats expérimentaux. Il est clair que seule une théorie statistique pourrait leur donner un fondement vraiment solide [1].

[1] En effet et par exemple toutes les intersections diffèrent tant par leur énergie d'activation particulière que par l'effet des contraintes appliquées. Les schémas exposés ici reposent sur l'idée (contestable) d'une « intersection type » supposée représentative.

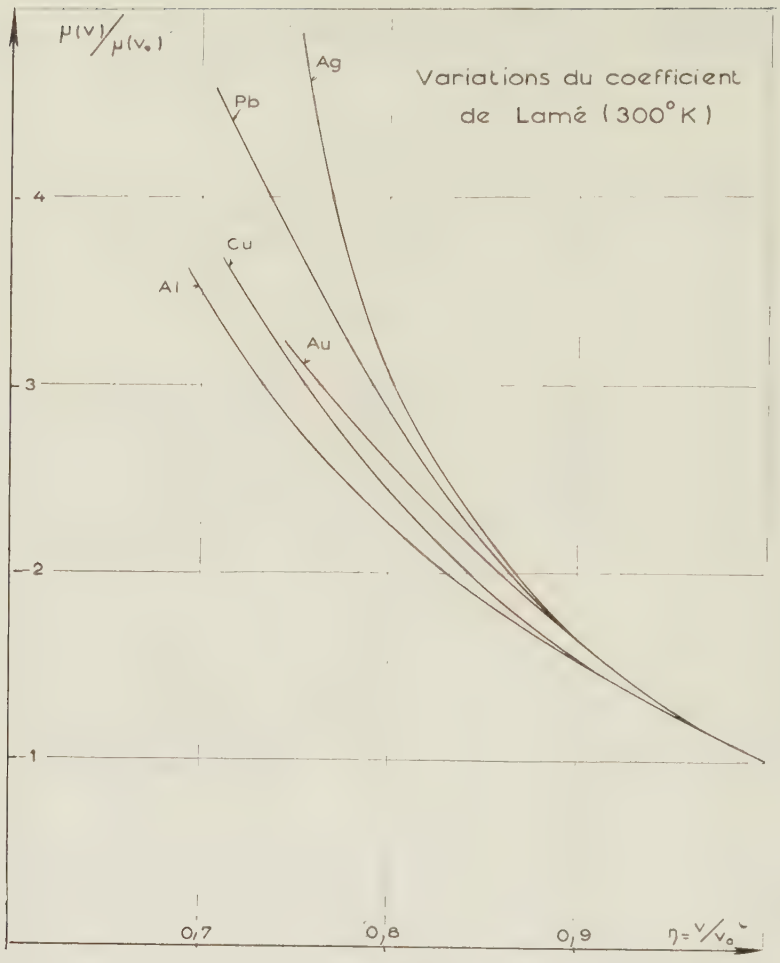


Fig. 10

En mécanique du continu, les équations de comportement doivent être aussi simples que possible et il n'est pas nécessaire qu'un paramètre tel que N possède une interprétation physique directe. C'est en effet un indice abstrait dont le seul rôle est de fournir des renseignements utiles du point de vue mécanique sur les défauts du cristal.

Néanmoins, dans chaque cas les résultats obtenus par les physiciens et les métallurgistes (mise en évidence directe des mécanismes de déformation) peuvent aiguiller le mécanicien vers un certain choix de paramètres et certaines formes d'équations.

La corrélation clairement démontrée expérimentalement entre limite élastique et densité de dislocations explique l'importance que nous avons donnée à cette quantité. Mais on sait que dans des cas particuliers il y aurait lieu de distinguer plusieurs densités selon que l'on observe les parois ou l'intérieur des cellules de polygonisation, qu'il pourrait être nécessaire de séparer dislocations vis et dislo-

cations coins, qu'il faudrait peut-être tenir compte des densités de lacunes, de la taille des grains, etc. Il est d'ailleurs certain que le système des équations de comportement ne peut être général, c'est-à-dire s'appliquer à des conditions très diverses, qu'au prix d'une grande complication. Mais il est encourageant que les coefficients numériques utilisés puissent être évalués séparément en explorant à l'aide d'expériences variées des domaines particuliers de l'espace des $\overline{S_{11}}^*$, S_{11}, T^*.

CHAPITRE 3

APPLICATIONS

3.1. L'ÉCOULEMENT MONODIMENSIONNEL; ÉQUATIONS GÉNÉRALES; STRUCTURE DES CHOCS.

Les expériences de compression dynamique dans lesquelles l'écoulement reste monodimensionnel sont les plus faciles à interpréter et constituent par conséquent à l'heure actuelle la source principale de renseignements quantitatifs précis. Le tenseur déviateur de la déformation élastique présente alors la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} = -\frac{1}{2}e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} = -\frac{1}{2}e_{11} \end{vmatrix}$$

si l'indice 1 est affecté à la direction privilégiée.

La déformation du matériau est alors régie par l'ensemble d'équations suivant :

$$(1)\quad \rho \frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} \qquad (2)\quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

$$(3)\quad S_{11} = 2\mu e_{11} \qquad (4)\quad \frac{de_{11}}{dt} = \frac{2}{3}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \beta (J_2^s, K, \rho, T) S_{11}$$

$$(5)\quad \frac{dK}{dt} = \mathcal{R} (J_2^s, K, \rho, T) \qquad (6)\quad \rho \frac{dE}{dt} = (-p + S_{11}) \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

$$(7)\quad p = p (J_2^s, K, \rho, T)$$

s'il n'y a qu'un seul paramètre d'écrouissage (K).

Si :

$$(8)\qquad \Phi = \Phi_0 (\rho, T) + \frac{2\mu}{\rho} (K + J_2^e)$$

$$(9)\qquad E = \Phi - T\frac{\partial \Phi}{\partial T} = E_0 (\rho, T) + \frac{2\mu^*}{\rho} (K + J_2^e) \quad \text{avec} \quad \mu^* = \mu \left(1 - \frac{\partial ln\, \mu}{\partial ln\, T}\right) \wedge \mu$$

$$(10)\qquad p = \rho^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = p_0 (\rho, T) + 2\mu \left(\frac{\partial ln \mu}{\partial ln \rho} - 1\right) (K + J_2^e).$$

Si l'écoulement est permanent, les équations (1) (2) et (6) s'intègrent immédiatement :

$$\rho v_1 = C_1 \tag{11}$$

$$-p + S_{11} - C_1 v_1 = C_2 \tag{12}$$

$$C_1 \left(E - \frac{1}{2} v_1^2 \right) - C_2 v_1 = C_3 \tag{13}$$

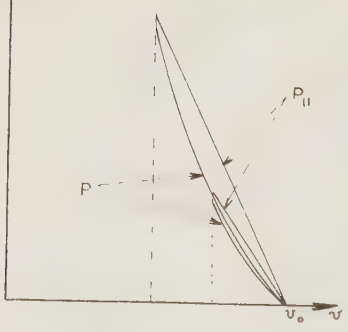
C_1, C_2, C_3 sont trois constantes.

La vitesse matérielle, la tension principale dans la direction x_1 et l'énergie interne s'expriment directement en fonction de la densité.

On sait d'ailleurs que ces relations de conservation sont aussi valables pour une onde de discontinuité (choc), évoluant peut-être avec le temps, mais d'épaisseur nulle. Elles relient à chaque instant les valeurs des grandeurs mécaniques amont et aval en un même point pris sur le choc.

Le système écrit ci-dessus permettrait d'ailleurs d'étudier la structure des chocs faibles permanents, suffisamment étalés pour que l'agrégat polycristallin puisse être considéré du point de vue macroscopique. On voit d'ailleurs immédiatement que le choc est d'autant plus raide qu'il est plus intense et l'expérience montre que s'il dépasse quelques kilobars son épaisseur est en général inférieure au diamètre des grains (souvent de l'ordre de 1/10 de mm). Un schéma acceptable devra alors envisager la déformation par choc au sein d'un monocristal et prédire par quelle composition de glissements celle-ci peut être réalisée. Par exemple, dans le cas de cristaux C F C, il faudrait savoir comment cinq au moins des 12 glissements possibles sont successivement mis en œuvre. Le résultat dépendrait, bien entendu, de l'orientation du choc par rapport au réseau.

La relation (12) apparaît essentielle pour la compréhension de la structure des chocs. Elle stipule que dans la mesure où la notion de tension peut être utilisée, c'est-à-dire dans la mesure où le choc est microscopiquement épais, la pression dans le sens de propagation $p_{11} = -\sigma_{11} = p - S_{11}$ doit varier linéairement avec le volume spécifique au cours de la déformation (cas d'un mouvement stationnaire).



Nous avons représenté ci-contre, pour deux compressions d'intensités différentes les variations de p_{11} et de p en fonction du volume.

Pour les chocs faibles on peut penser que l'écart entre p_{11} et p reste assez petitpour que la déformation soit explicable par un mouvement de dislocations et leur multiplication due en particulier au mécanisme de Frank et Read. Le choc aurait alors une épaisseur notable et un profil dépendant de l'écrouissage préalable du métal par la densité des dislocations et leur distribution (réseau de Frank). Il est clair d'autre part que pour des chocs plus intenses l'écart $p_{11} - p$ prend des valeurs telles $\left(\text{voisines de } \frac{\mu}{10}\right)$ que des boucles de dislocations et des macles se forment spontanément (cf. fig. 11); mais le durcissement qu'elles provoqueraient ne serait pas forcément analogue à celui que l'on obtient

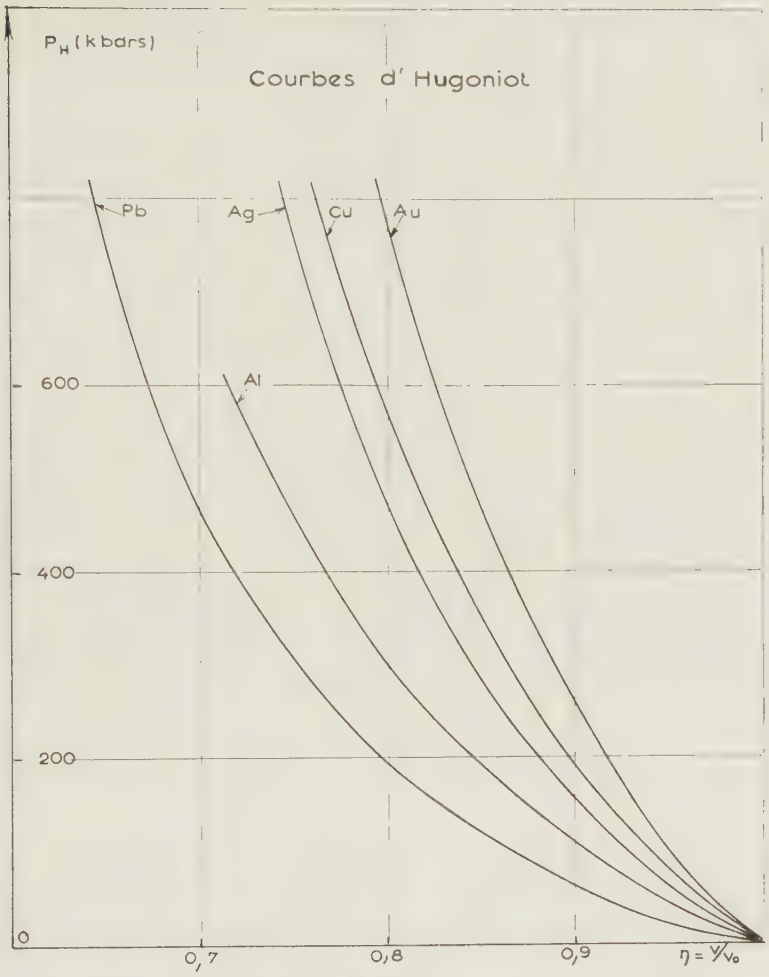


FIG. 11

par les compressions habituelles et un seul paramètre d'écrouissage ($\overline{S_{11}}$) serait peut-être insuffisant pour rendre compte des phénomènes. Des mesures de dureté après choc ont d'ailleurs montré que le durcissement était alors supérieur à celui que produiraient des déformations lentes de même intensité (Il faut cependant remarquer qu'il est très difficile de séparer les écrouissages produits respectivement par un choc et la détente qui le suit obligatoirement; cf. problème de la formation des macles (réf. 24). On peut donc s'attendre à pouvoir distinguer au moins deux régions sur la courbe qui décrit les variations de la limite d'écoulement dans l'état comprimé en fonction de l'intensité du choc.

On manque de résultats expérimentaux sur ce point. Sur aluminium, Curran (réf. 25) a cependant effectué une mesure de la limite élastique [1] apparente (vitesse de déformation $u_{11} \sim 10^5$) relative à un état condensé obtenu par choc ($p \simeq 170.000$ atm). Le chiffre qu'il obtient ($Y \simeq 12.000$ atm) est nettement supérieur à ce qu'on peut attendre ($Y \simeq 2.500$ atm) en appliquant la notion d'état correspondant aux résultats classiques tirés d'expériences sur éprouvettes. Ce désaccord s'expliquerait, soit par un écrouissage de nature différente (dans un choc de cette intensité, p_{11}-p atteint des valeurs voisines de $\frac{\mu}{10}$ et il pourrait se former une multitude de petites boucles), soit parce que la largeur des dislocations dissociées et le rapport $\frac{\mu b}{f}$ augmenteraient avec la densité [2]. Une légère augmentation de la limite élastique a été observée dans des essais de compression statique (Bridgman et *al.*) mais les résultats quantitatifs, trop fragmentaires, et incertains, ne permettent pas de trancher (réf. 26).

Enfin, pour des chocs très intenses, au cours desquels se développent d'énormes cissions, la redistribution des molécules est peut-être réalisée d'une manière beaucoup plus désordonnée par des glissements analogues à ceux qui se produisent en phase liquide et à la suite desquels une sorte de recristallisation aurait lieu. Des expériences récentes qui consistaient à désordonner par choc des alliages or-cuivre semblent confirmer cette manière de voir (réf. 27). On voit d'ailleurs mal à quel état d'écrouissage une telle déformation pourrait conduire. Il est curieux de noter que des cas de restauration par choc ont pu être observés et il est en fait très concevable que le choc puisse réduire l'écrouissage d'un métal très durci. Néanmoins, là encore l'insuffisance des observations ne permet guère que des conjectures [3].

3.2. L'adiabatique de détente.

Dans la plupart des expériences on est conduit à envisager la détente du métal après passage de l'onde de choc.

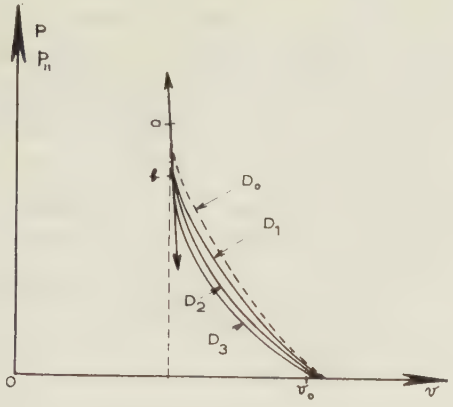
Si celle-ci se réfléchit sur une surface libre, le métal se décomprime et à chaque molécule correspond une courbe de détente dans le diagramme en p-v. Toutes ces courbes commencent par une partie « élastique » qui traduit la première phase du phénomène pendant laquelle la tension S_{11} change de signe. Si l'influence de la vitesse de déformation se fait sentir, cette partie sera d'autant plus longue et la courbe d'autant plus concave que la molécule sera située plus près de la surface libre.

---

[1] Cf. note p. 47.

[2] Cf Annexe 2.

[3] Il est très possible qu'il n'existe pas de solution stationnaire aux équations du mouvement, la compression par choc ne se faisant pas tout à fait de la même manière pour toutes les molécules, à cause de microfluctuations dans l'écoulement. On pourrait néanmoins donner à la relation (12) un sens statistique et ce qu'il semble bon de retenir c'est que des différences $p_{11} - p$ très notables, de l'ordre de $\frac{\mu}{10}$ peuvent et doivent sans doute apparaître à l'intérieur du choc.



La figure ci-dessus montre deux exemples de ces adiabatiques (D_2), (D_3) en dessous de la courbe (D_1) que l'on adopterait dans un schéma élastique plastique [1].

On a tracé aussi en pointillé la variation adiabatique de la pression hydrostatique en fonction de $v(D_0)$. On vérifie aisément que la partie « élastique » de (D_1) [ou de (D_2) et (D_3)], a une pente plus forte que (D_0), le rapport des deux étant égal à $\frac{3(1-\nu)}{1+\nu}$ [2]. D'autre part, la chute de la pression p_{11} entre les deux extrémités du segment ab, partie élastique de (D_1) est égale à :

$$2\sqrt{3}\,\frac{(1-\nu)}{1-2\nu}\sqrt{J_2^{s*}}\ [3]$$

et pendant la déformation plastique au long de (D_d)

$$p_{11} = p - \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2^{s*}\,(K, \rho, T)}$$

Pour la détermination de l'adiabatique d'Ugoniot, on mesure souvent au lieu de la vitesse matérielle v_1, derrière le choc, celle prise par la surface libre à sa réflexion.

On sait que :

$$v_s = v_1 + \int_D \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\,\frac{d\rho}{\rho}.$$

---

[1] Dans un schéma élastique-plastique on néglige l'effet des contraintes sur la vitesse de déformation. On peut admettre le critère d'écoulement de Lévy-von Mises, d'après lequel la déformation plastique ne se produit que si $\sqrt{J_2^s}$ atteint une valeur limite $\sqrt{J_2^{s*}} = f(\rho, K, T)$ et conserver la proportionnalité des tenseurs u_{ij}^p et S_{ij} : $u_{ij}^p = \beta\, S_{ij}$. Dans le domaine plastique, le paramètre β, et par conséquent la vitesse de déformation u_{ij}^p, prennent des valeurs telles que la molécule reste à la limite d'écoulement.

[2] ν représente le coefficient de Poisson adiabatique.

[3] On utilise souvent, en pratique, plutôt que J_2^{s*}, la limite élastique $Y = \sqrt{3}\sqrt{J_2^{s*}}$.

Ceci suppose implicitement un choc quasi stationnaire et une courbe de détente unique $p = p(\rho)$ au long de laquelle la pente $\frac{dp}{d\rho}$ est calculée, sinon la vitesse v_s risque de varier sensiblement avec le temps, ce qu'en fait les expériences ne semblent pas mettre en évidence. Mais, même si la vitesse de déformation joue un rôle, l'effet sur la vitesse de surface libre n'est probablement pas très notable parce que l'intégrale de Riemann $\int \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \frac{d\rho}{\rho}$ n'est pas très sensible aux changements de forme envisagés de la courbe $p(\rho)$.

Lorsque la courbe (D) se creuse [de (D_1) à (D_3)] l'intégrale diminue sans doute mais très légèrement. Un calcul exact de l'écoulement dans le cadre d'un modèle viscoplastique semble compliqué.

3.3. L'adiabatique dynamique d'un métal et le calcul de l'équation d'état.

Il s'agit ici d'un métal parfaitement défini en ce qui concerne les taux d'impuretés, la taille, la forme et les orientations préférentielles des grains, les écrouissages préalables, etc. Nous nous appuierons sur les expressions du potentiel, de l'énergie interne et de la pression données au paragraphe 3.1.

Il faut d'abord noter qu'en ce qui concerne la pression un terme correctif qui n'est peut-être pas tout à fait négligeable provient de l'écrouissage.

Dans le cas du cuivre par exemple et dans les conditions ordinaires ($p = 0$ $T = 300\ ^oK$) $\frac{2\mu^* K}{\rho}$ peut atteindre 1 cal/g pour un écrouissage poussé $\left(\frac{2\mu^*}{\rho} J_2'\right.$ étant alors de l'ordre de 1/60 cal/g lorsqu'on se trouve au voisinage de la limite élastique). L'accroissement de pression est alors notable, à cause surtout du terme en K et peut être chiffré en milliers d'atmosphères; si on suppose le coefficient de Poisson constant :

$$\frac{d\ ln\ \mu}{d\ ln\ \rho} = \frac{d\ ln K}{d\ ln\ \rho} \wedge 2\gamma + \frac{1}{3}$$

γ = coefficient de Grüneisen.

On trouve $p\text{-}p_0 \sim 1.500$ atm.

Il résulte de cette augmentation de pression isotrope à volume constant que si l'on maintient l'échantillon à pression constante, par exemple à pression nulle, et qu'on l'écrouit le volume augmente. On aura en utilisant l'hypothèse précédente :

$$\frac{\delta V}{V} = \chi \delta p = \rho \chi \delta E \left(2\gamma - \frac{2}{3}\right)$$

$$\delta V = \chi \delta E \left(2\gamma - \frac{2}{3}\right)$$

χ = compressibilité

où :

$$\delta E = \frac{2\mu^*}{\rho} K \wedge \frac{2\mu}{\rho} K$$

est l'accroissement d'énergie interne dû aux défauts (lacunes, dislocations, etc.). En fait, il a été établi par d'autres méthodes qu'une longueur atomique de dislocation provoque un accroissement de volume comparable au volume atomique (réf. 28). C'est aussi l'estimation que l'on pourrait faire à l'aide de la formule précédente.

Nous avons vu d'autre part que la limite élastique croît souvent considérablement avec la densité et on peut imaginer que le métal qui vient d'être comprimé par un choc présente des imperfections de structure cristalline particulièrement nombreuses et variées. C'est pourquoi nous conserverons les termes correctifs dans les expressions (8), (9), (10) du paragraphe 3.1.

Négligeant la différence entre μ et μ^* et considérant E_0 comme fonction de ρ et p_0, l'énergie et la pression principale p_{11} (dans la direction de propagation du choc) sont données par :

$$E = E_0(p_0, \rho) + \frac{2\mu(\rho T)}{\rho} K + \frac{Y^2(\rho T)}{6\mu\rho}$$

$$p_{11} = p_0 + \left(2\mu K + \frac{Y^2}{6\mu}\right)\left(\frac{\partial ln\,\mu}{\partial ln\,\rho} - 1\right) + \frac{2}{3} Y$$

(Y = limite élastique apparente)

L'équation de conservation de l'énergie à travers le choc devient donc [1] :

$$(1) \qquad E_0(\rho, p_{11} - \pi_{11}) + \frac{1}{\rho}\left(2\mu K + \frac{Y^2}{6\mu}\right) - E_0(\rho_0, 0) = \frac{1}{2} p_{11}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right)$$

avec :

$$\pi_{11} = \left[2\mu K + \frac{Y^2}{6\mu}\right]\left(\frac{\partial ln\,\mu}{\partial ln\,\rho} - 1\right) + \frac{2}{3} Y$$

au lieu de :

$$(1\ bis) \qquad E_0(\rho, p_{11}) - E_0(\rho_0, 0) = \frac{1}{2} p_{11}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right)$$

dans l'hypothèse hydrostatique.

Pour un échantillon de caractéristiques bien définies, la limite élastique (Y) correspondant au comportement du métal derrière le choc croît d'une certaine façon avec l'intensité de ce dernier; il est probable que le taux d'écrouissage K suit une courbe associée et que sa croissance avec la pression de choc est d'autant plus rapide que l'est celle de Y.

Comparons maintenant l'adiabatique dynamique expérimentale de ce métal ($\mathcal{H}$) d'équation $p_{11} = p_{11}(\rho)$ avec l'adiabatique dynamique idéale ($\mathcal{H}_0$) qui existerait si le choc comprimait la matière d'une matière isotrope et sans créer aucun défaut. Soit $A(p_0, \rho)$ un point de ($\mathcal{H}_0$).

$$\left\{ E_0(\rho, p_0) - E_0(\rho_0, 0) = \frac{1}{2} p_0\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right) \right\}$$

[1] On admet ici que l'état initial est parfait et sans déformations élastiques. Si cela n'est pas le cas, l'équation suivante doit être évidemment modifiée en conséquence.

Si $p_{11} = p_0$, le premier membre de (1) est inférieur au second lorsqu'approximativement :

$$\Delta E = -\frac{\pi_{11}}{\rho\gamma} + \frac{1}{\rho}\left(2\mu K + \frac{Y^2}{6\mu}\right) < 0$$

ou :

$$\left(2\mu K + \frac{Y^2}{6\mu}\right)\left(\gamma + 1 - \frac{\partial ln\,\mu}{\partial ln\,\rho}\right) < \frac{2}{3}Y$$

ce qui est, pour ainsi dire, toujours vérifié puisque :

$$\frac{\partial ln\,\mu}{\partial ln\,\rho} < 2\gamma + \frac{1}{3}.$$

Alors comme :

$$\left(\frac{\partial E_0}{\partial p_0}\right)_\rho = \frac{1}{\rho\gamma} \qquad \text{et} \qquad \left\{\frac{\partial}{\partial p_{11}}\left[\frac{1}{2}p_{11}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right)\right]\right\}_\rho = \frac{1}{2\rho}\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)$$

on vérifie facilement que la pression p_{11} convenable pour la densité ρ et le métal écroui sera telle que :

$$\frac{\Delta E}{p_{11} - p_0} = \frac{1}{2\rho}\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) - \frac{1}{\rho\gamma}$$

$p_{11} - p_0$ sera donc positif tant que $\frac{\rho}{\rho_0} < \frac{2}{\gamma} + 1$.

Finalement on obtient, grosso modo, le résultat suivant :

$$p_{11} - p_0 = \frac{\frac{2}{3}Y + \left(2\mu K + \frac{Y^2}{6\mu}\right)\left(\frac{\partial ln\,\mu}{\partial ln\,\rho} - 1 - \gamma\right)}{1 - \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)}$$

La pression dans la direction du choc est donc supérieure à p_0 d'une quantité plus grande que $\frac{2}{3}Y$ et il est clair que la courbe d'Hugoniot est d'autant plus relevée que le métal est plus écroui. Il faudra en tenir compte dans l'interprétation de l'adiabatique dynamique expérimentale, lorsqu'il faudra passer de la courbe donnée $p_{11}(\rho)$ à la courbe théorique $p_0(\rho)$ utilisée dans le calcul de l'équation d'état.

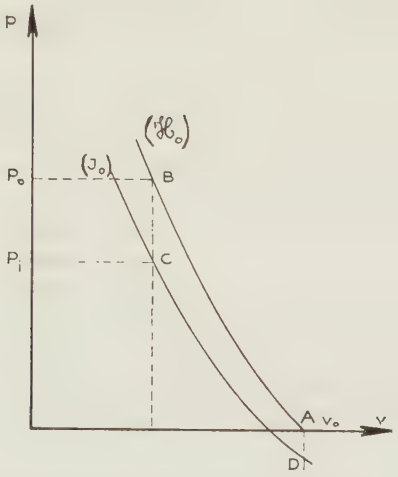
La recherche de l'équation d'état.

Ainsi que nous l'avons indiqué dans la première partie, le domaine des densités et températures auquel nous nous intéressons est celui pour lequel une équation d'état du type Mie-Grüneisen est acceptable :

$$p\,(v,\ T) = p_i\,(v) + \frac{\gamma\,(v)}{v}E_T.$$

Il est habituel (réf. 29, 30, 31) de déterminer simultanément les fonctions $p_i(v)$ et $\gamma(v)$ en se donnant *a priori* une expression de $\gamma(v)$ dans laquelle entrent la compressibilité (ou son inverse $K_0(v)$] sur l'isotherme (I_0) et ses dérivées :

$$\gamma = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\frac{d\,ln\,K_0}{d\,ln\,v} - \frac{1}{2}\frac{d\,ln\left(1-\frac{np_i}{K_0}\right)}{d\,ln\,v} \tag{2}$$



et en utilisant la relation de conservation de l'énergie valable sur l'adiabatique idéale (H_0) :

$$E_0(v,\, p_0) - E_0(v_0,\, 0) = \frac{1}{2}p_0(v_0 - v) \tag{3}$$

(v_0 étant le volume spécifique sous pression zéro et pour la température d'expérience $T^o \sim 300\ ^oK$).

On déduit alors de (1) et (3) la forme suivante de $\gamma(v)$:

$$\gamma(v) = \frac{v\,[p_0(v) - p_i(v)]}{\frac{3\,RT_0\,v_0}{V_M^0} + \frac{1}{2}p_0(v_0 - v) + \int_{v_0}^{v} p_i(v)\,dv} \tag{4}$$

où :

$p_0(v)$ est l'équation de (H_0);
R la constante des gaz;
V_M^0 le volume moléculaire sous pression 0 et température $T_0 = 300\ ^oK$.

(Il est admis qu'en l'état A l'énergie thermique d'une molécule gramme est $3RT_0$.)

La fonction $p_i(v)$ est solution de l'équation différentielle du troisième ordre obtenue en égalant les expressions (2) et (4); $\gamma(v)$ est évidemment un sous-produit de cette intégration.

Le calcul de l'équation d'état ne peut plus se faire de la même manière si l'on introduit $\mu_0(v)$ coefficient de LAMÉ à 0 °K ,ou plus généralement des coefficients d'élasticité autres que K_0 dans l'expression de γ. Or cette complication semble nécessaire à l'amélioration de ce calcul. Il serait donc très intéressant :

a. De déterminer expérimentalement la fonction $\gamma(v)$, à l'aide, sans doute, d'une deuxième adiabatique dynamique dont le pôle correspondrait à un état chaud du métal;

b. D'obtenir davantage de résultats théoriques et expérimentaux (méthodes statiques et dynamiques) sur les variations des coefficients d'élasticité avec la densité;

c. De confronter tous ces renseignements dans le cadre du modèle exposé dans la première partie.

3.4. LE PHÉNOMÈNE D'ÉCAILLAGE.

a. *Introduction.*

L'écaillage est un mode de rupture dynamique caractérisé par la rencontre de deux ondes de détente. Dans les expériences que nous avons faites, une onde de choc plane traverse une plaque d'aluminium (duralumin) qui lui est parallèle; elle est suivie d'une détente et il en nait une seconde à la réflexion sur la surface libre. Ainsi ne sont mises en jeu que des déformations uniaxiales du métal. Il s'agit en particulier de déterminer des tensions de rupture R lorsque la contraction latérale est interdite. D'autre part, la détente se produit à grande vitesse, en moins de 1 μs de la pression relativement élevée obtenue par choc (200.000 atm. environ).

La méthode que nous avons employée permet de déterminer R à partir de l'observation de deux grandeurs tout à fait distinctes dont l'une est l'épaisseur de l'écaille et l'autre caractérise la manière dont le choc s'est amorti dans la plaque avant d'atteindre la surface libre. Le résultat dépend néanmoins sensiblement, et c'est ce qui nous intéresse ici, de l'hypothèse que l'on fait sur la valeur de la limite élastique apparente Y du métal comprimé par choc.

Seules les coordonnées lagrangiennes sont utilisées dans les calculs suivants; Ox est supposé dirigé dans la direction de propagation du choc.

b. *Résultats théoriques sur l'amortissement des chocs plans.*

Supposant que le choc se propage dans un milieu au repos à pression zéro (densité ρ_0), on montre aisément [1] que si $\hat{p}(x)$ est son insentité lorsqu'il atteint l'abscisse x, $\left(\frac{\hat{dp}}{dx}\right)_{x=x_0}$ peut être relié au gradient de pression qui règne derrière le choc au même instant :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{2\,m_1 m_2 + m_3 (m_1 + m_2)}{2\,m_2 (m_1 - m_3)} \dfrac{\hat{dp}}{dx} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{3\,m_2 + m_1}{2\,(m_3 - m_1)} \dfrac{\omega_0}{\rho_0 m_2} \dfrac{\hat{dp}}{dx} \end{cases}$$

[1] Cf. Annexe 1.

Dans un diagramme où $\frac{p}{\rho_0}$ est porté en ordonnée et $\eta = \frac{v}{v_0}$ en abscisse, m_1, m_2, m_3 représentent respectivement la pente de la droite de choc, celles de l'adiabatique d'HUGONIOT et de l'adiabatique de détente pour $\hat{p}$ p (fig. 12).

ω est la vitesse du choc ($\omega^2 = -m_1$).

Mais quelle valeur donner à m_3? Si l'on s'en tient à la définition, il convient de choisir la pente $(\overline{m_3})$ de la partie élastique de la courbe de détente. La formule (1) permet alors de calculer $\frac{\partial p}{\partial x}$ juste derrière le choc mais ce $\frac{\partial p}{\partial x}$ là $\left(\text{noté } \frac{\overline{\partial p}}{\partial x}\right)$ ne permet d'estimer les variations de la pression que dans une tranche assez mince de métal encore intéressé par la détente élastique.

C'est pourquoi nous avons été amenés à distinguer deux phases dans le processus de détente, l'une élastique représentée par un segment rectiligne dans le diagramme en p-ε, précédant l'autre de caractère plastique et habituellement seule considérée. Une discontinuité de vitesse du son impose en effet une discontinuité dans les régimes d'écoulement.

Si dans un diagramme en x-t (fig. 13) la trajectoire (γ) du choc est connue ainsi que la limite élastique apparente $Y(\hat{p}, \hat{T})$ on peut construire la frontière (γ') qui sépare les deux zones de détente; elle est presque parallèle à (γ). Supposons en effet le coefficient de POISSON (ν) indépendant des conditions de pression et de température; la pente $\overline{m_3}$ est reliée à m_3, pente de départ d'une isentropique usuelle par $\overline{m_3} = \frac{3(1-\nu)}{1+\nu} m_3$. La distance Δx des deux courbes (γ) et (γ') mesurée parallèlement à l'axe des x s'obtient alors approximativement en écrivant (fig. 13) :

$$\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\Delta x}{\omega} = \frac{\overline{m_3}(3m_2 + m_1)}{2m_2(\overline{m_3} - m_1)} \Delta x \frac{\hat{dp}}{dx} = -\Delta p$$

$$\Delta p = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} Y = +4{,}12\, Y$$

pour l'aluminium (cf. § 3.2).

Dans les cas qui nous concernent, Δx est de l'ordre du 1/10 de mm pour un Δp égal à 1.000 atm.

Si on fait alors l'hypothèse que la vitesse de propagation Ω de la frontière entre la zone élastique (zone 1) et la zone plastique (zone 2) est égale à la vitesse ω du choc, la discontinuité $\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]_1^2$ se calcule d'après :

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]_1^2 \left[\Omega - \frac{1}{\rho_0 \Omega}\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)_2\right] = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 \left[\frac{\partial p}{\partial \eta}\right]_1^2$$

soit :

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]_1^2 = \rho_0 \omega \frac{\overline{m_3} - m_3}{m_3 - m_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1.$$

Le tableau III (système MTS sauf contre-indication) indique dans certains cas d'expériences les valeurs prises par $\hat{p}$, $\frac{\hat{dp}}{dx}$, ω, m_2, $-m_3$, $-\overline{m_3} = -1{,}47\, m_3$

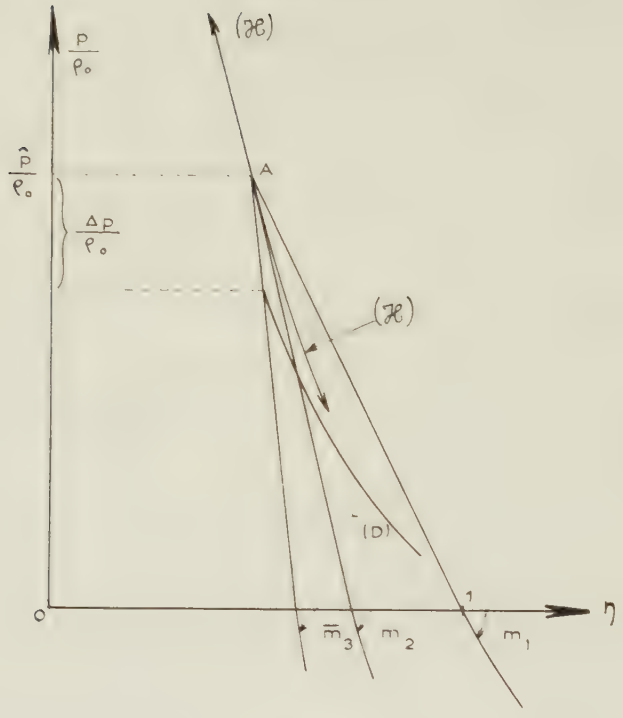


FIG. 12

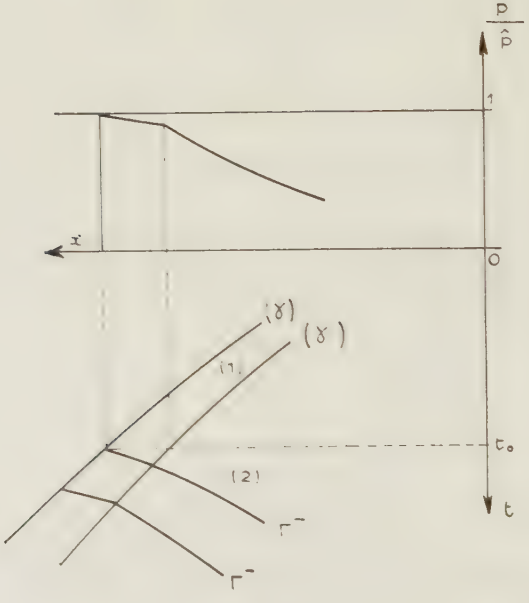


FIG. 13

(coefficient de POISSON constant), et le Δx qui correspond à Δp 10^5. On a aussi calculé les rapports [1] :

$$-\frac{\left(\overline{\frac{\partial p}{\partial x}}\right)_1}{\widehat{\frac{dp}{dx}}}, \qquad -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1}{\widehat{\frac{dp}{dx}}}, \qquad -10^3\frac{\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}\right)_1}{\widehat{\frac{dp}{dx}}}, \qquad -10^3\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2}{\widehat{\frac{dp}{dx}}}$$

et pour le cas où l'on considère deux phases de détente $-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2 / \widehat{\frac{dp}{dx}}$ (tableau IV), on constate que $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2$ est, à très peu près, égal au chiffre que l'on obtiendrait en portant dans la formule (1) la valeur de la pente de l'adiabatique hydrostatique. Autre manière de dire que l'évolution du choc n'est que très peu influencée par l'existence d'une première phase de détente élastique.

TABLEAU III (Unités MTS)

e = épaisseur initiale de la plaque d'aluminium écaillée	$\hat{p}$	$-\widehat{\frac{dp}{dx}}$	ω	$-m_2$	$-m_3$	$\overline{-m_3}$	Δx
mm							mm
$e = 15$	$224\ 10^5$	$24\ 10^7$	6 840	$76{,}8\ 10^6$	$76{,}53\ 10^6$	$112{,}5\ 10^6$	0,135
$e = 25$	$184\ 15^5$	$34\ 10^7$	6 600	$67{,}1\ 10^6$	$63{,}86\ 10^6$	$93{,}87\ 10^6$	0,087
$e = 35$	$156\ 10^5$	$24\ 10^7$	6 420	$60{,}7\ 10^6$	$58{,}23\ 10^6$	$85{,}6\ 10^6$	0,115
$e = 45$	$136\ 10^5$	$20\ 10^7$	6 280	$55{,}7\ 10^6$	$53{,}95\ 10_1$	$79{,}3\ 10^6$	0,135

TABLEAU IV (Unités MTS)

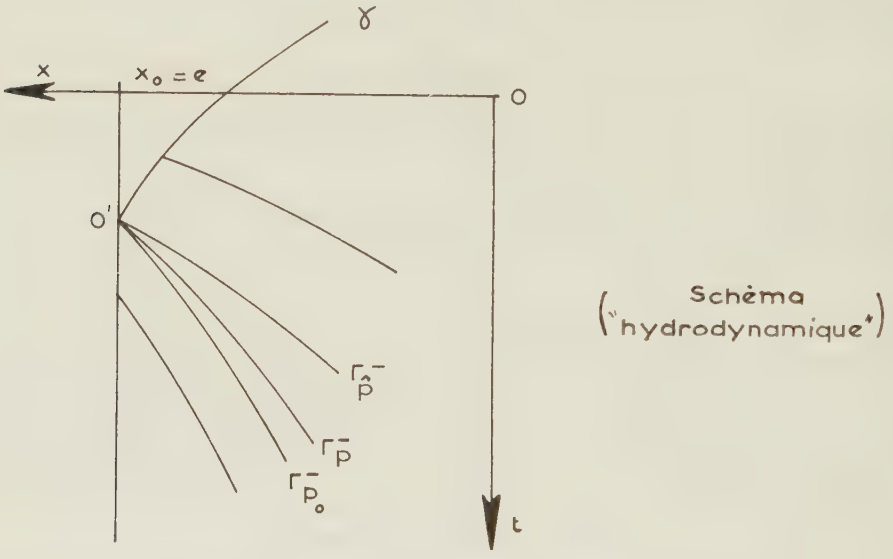
e	$\hat{p}$	$-\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1}{\widehat{\frac{dp}{dx}}}$	$-10^3\frac{\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}\right)_1}{\frac{dp}{dx}}$	$-\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1}{\frac{dp}{dx}}$	$-10^3\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1}{\frac{dp}{dx}}$	$-\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2}{\frac{dp}{dx}}$
mm						
$e = 15$	$224\ 10^5$	2,09	0,067	3,65	0,148	3,65
$e = 25$	$184\ 10^5$	2,4	0,085	4,74	0,212	4,74
$e = 35$	$156\ 10^5$	2,6	0,095	5,63	0,264	5,53
$e = 45$	$136\ 10^5$	2,68	0,104	5,85	0,285	5,85

[1] Les quantités surlignées sont associées à la valeur élastique du paramètre m_3, les autres à sa valeur « hydrostatique » habituelle.

En résumé la détente élastique derrière le choc se traduit par l'existence d'une zone de décompression lente indiquée sur le profil de pression de la figure 13.

c. *Résultats théoriques sur le phénomène de détente.*

A partir de l'instant où le choc arrive sur la surface libre, le métal se détend dans un second milieu (en général l'air ambiant) de la pression de choc p à une pression p_0 qui dépend de la nature de ce dernier. Un faisceau de détente se propage vers l'intérieur du métal et les courbes « caractéristiques » de l'écoulement ont la forme esquissée sur la figure.



Des calculs théoriques et des évaluations numériques non reproduits ici montrent qu'on introduit une très faible erreur — inférieure aux erreurs expérimentales — en négligeant le fait que les molécules situées à l'intérieur du métal ont subi un choc plus intense que celles de la surface libre et en supposant la vitesse du son uniquement fonction de p.

Soit deux caractéristiques Γ^-_p et $\Gamma_{p'}$, [1] issues de O' (cf. fig.) avec des pentes égales (en valeurs absolues) aux vitesses lagrangiennes C_p et $C_{p'}$, du son pour les pressions respectives p et p', vitesses mesurées au long de l'isentropique de détente

---

[1] Γ^- désigne une caractéristique dont la pente, dans le diagramme en x-t est égale en valeur absolue et opposée en signe à la vitesse lagrangienne du son. Remarque analogue pour Γ^+.

issue de $\widehat{p}$. Alors, considérant les dérivées de la pression au long de ces caractéristiques, on montre aisément que [1] :

$$\frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\Gamma_{\widehat{p}}^{-}}}{C_{\widehat{p}}^{1,2}} = -\frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\Gamma_{\widehat{p}'}^{+}}}{C_{\widehat{p}'}^{1,2}}. \tag{2}$$

La caractéristique Γ_{p_0} se trouve être, si l'on peut dire, le « lieu » des minima de pression. L'événement « début de rupture » avec ses deux coordonnées d'espace et de temps sera donc représenté par un point de cette courbe. L'épaisseur de la première écaille permet de connaître son abscisse et par conséquent d'approcher la tension de rupture (ou du moins la tension de début de rupture) grâce à $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\Gamma_0}$ si $\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)_{\Gamma_0}$ n'est pas trop grand. La formule (2) exprime $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\Gamma_0^-}$ en fonction de $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\Gamma_{\widehat{p}}^{-}}$ dérivée qui elle-même et d'après les résultats du paragraphe précédent, peut être calculée à partir de $\frac{\partial p}{\partial x}$ ou mieux du $\frac{\widehat{dp}}{dx}$ observé.

En effet :

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\Gamma_{\widehat{p}}^{-}} = \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{C_{\widehat{p}}}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 (-m_3)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial p}{\partial x}\left[1 - \frac{(-m_3)^{\frac{1}{2}}(3m_2 + m_1)\,\omega}{2m_1 m_2 + m_3(m_1 + m_2)}\right] = \alpha\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Le coefficient α entre crochets est en général très voisin de 2. Ces résultats formels étant acquis, on peut soit négliger la phase élastique de la détente et les utiliser directement en choisissant les valeurs « hydrostatiques » de m_3 et $\frac{\partial p}{\partial x}$ soit envisager l'influence de l'élasticité dans la partie du phénomène qui nous occupe présentement.

La figure se modifie alors et prend la forme indiquée ci-dessous. Un choc élastique de détente remonte dans le matériau le long de l'arc O'A qui délimite avec (γ) et (γ') la zone (1). Affectons l'indice 3 à la région comprise entre O'A et $\Gamma_{\widehat{p}}^{-}$ [2]. Pour voir dans quelle mesure la détente se trouve modifiée, nous nous contenterons de schématiser les réactions du métal de la manière suivante :

Au point de O'A d'abscisse x :

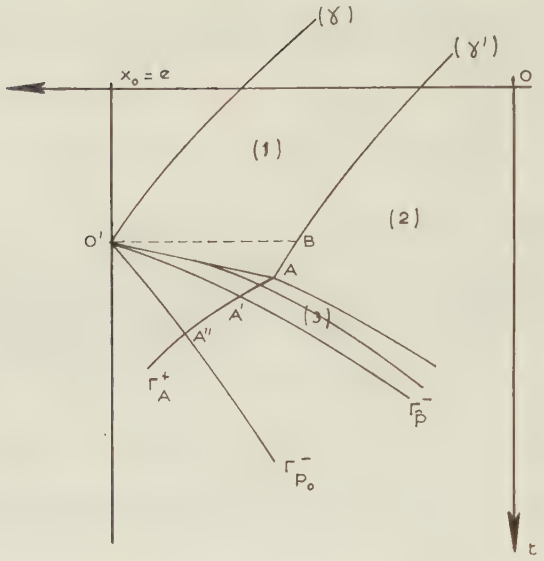
$$p_1 = \widehat{p} + \left(\frac{dp}{dx}\right)_{O'A} x = \widehat{p} + \bar{\alpha}\left(\frac{\overline{\partial p}}{\partial x}\right)_1 x = \widehat{p} + ax$$

$$u_1 = u + \frac{ax}{\rho_0 (-\overline{m_3})^{1,2}}$$

---

[1] Cf. Annexe 1.

[2] $\Gamma_{\widehat{p}}^{-}$ est ici la caractéristique issue de O' et de pente à l'origine $-(-m^3)^{1/2}$.



(Schéma élasto-plastique)

avec :

$$\bar{\alpha} = \left(1 - \frac{(-\overline{m_3})^{1/2}\,(3\,m_2 + m_1)\,\omega}{2\,m_1 m_2 + \overline{m_3}\,(m_1 + m_2)}\right).$$

L'intensité du choc est :

$$[p]_1^3 = -\Delta p - \left(-\frac{\widehat{dp}}{dx} + a\right) x$$

d'où :

$$p_3 = \widehat{p} - \Delta p + \frac{\widehat{dp}}{dx}\,x$$

$$u_3 = u + \frac{\Delta p + \left(2\,a - \dfrac{\widehat{dp}}{dx}\right) x}{\rho_0\,(-\overline{m_3})^{1/2}}.$$

On en déduit la variation de pression sur la caractéristique $\Gamma^{\widehat{\ }}_{\overline{p}}$

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\Gamma^{\widehat{\ }}_{\overline{p}}} = \frac{1}{\left(\dfrac{\overline{m_3}}{m_3}\right)^{1/2} + 1}\left\{2\,a + \left[\left(\frac{\overline{m_3}}{m_3}\right)^{1/2} - 1\right]\frac{\widehat{dp}}{dx}\right\} = \beta\left(\frac{\overline{\partial p}}{\partial x}\right)_1$$

avec :

$$\frac{\overline{m_3}}{m_3} = \frac{3\,(1-\nu)}{1+\nu}.$$

Cette valeur de $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\Gamma^-_{p}}$ n'est valable que sur l'arc O'A'; au-delà de A' :

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\Gamma^{\wedge}_{p}} = \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2 .$$

Les valeurs de α. α et β pour nos expériences sont inscrites dans le tableau V. Puisque $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1$ est inférieur à $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2$ et que $\beta < \alpha$ la pression au long de $\Gamma^{\wedge}_{p}$ baisse plus lentement entre O' et A' qu'-au-delà de A'. La caractéristique Γ^+(A) coupe Γ_{p_0} en A''. La pente de B A'' est à peu près égale à la vitesse du choc,

Tableau V (Unités MTS)

e	$\dot{p}$	α	α	β
mm				
$e = 15$	$224\ 10^5$	1,99	1,92	1,69
$e = 25$	$184\ 10^5$	2	1,96	1,73
$e = 35$	$156\ 10^5$	2	1,97	1,75
$e = 45$	$136\ 10^5$	2	1,97	1,75

parce qu'il en est ainsi de B A et que la pente de AA'' est presque la moyenne géométrique des pentes de O'A et O'A'' donc elle est aussi voisine de ω.

Par conséquent :

$$| x_{O'} - x_{A''} | \sim \frac{C_{p_0}}{C_{p_0} + \omega} \Delta x < \frac{1}{2} \Delta x.$$

Finalement, on pourra admettre que si l'on se déplace sur la caractéristique Γ^-_{p0} pour :

$$x_{O'} > x > x_{A''} \quad \left(\frac{dp}{dx}\right)_{\Gamma^-_{p_0}} = \left(\frac{C_{p_0}}{C^{\wedge}_{p}}\right)^{1,2} \left(\frac{dp}{dx}\right)_{\Gamma^{\wedge}_{p}}$$

$$= \left(\frac{C_{p_0}}{C^{\wedge}_{p}}\right)^{1/2} \beta \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \quad \text{où } C^{\wedge}_{p} = (-m_3)^{1/2}$$

pour :

$$x < x_{A''} \qquad \left(\frac{dp}{dx}\right)_{\Gamma^-_{p_0}} = \left(\frac{C_{p_0}}{C^{\wedge}_{p}}\right)^{1/2} \left(\frac{dp}{dx}\right)_{\Gamma^{\wedge}_{p}} = \left(\frac{C_{p_0}}{C^{\wedge}_{p}}\right)^{1,2} \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2 .$$

On peut donc conclure que la pression baisse beaucoup plus lentement entre O et A″ qu'au-delà de ce dernier point.

Dans le cadre de nos expériences un Δp de l'ordre de 10.000 atm. conduit à $x_{0'} - x_{A''} \simeq 1/2$ mm, épaisseur qu'il faut comparer à celle des écailles, voisine de 1 mm. En négligeant la première étape de détente, on obtiendrait alors comme tension de rupture une valeur excessive et peut-être même, dans certains cas, deux fois plus grande que la valeur vraie. Bridgman a observé que l'application à température ambiante de pressions égales à 25.000 atm. et 50.000 atm. permet d'obtenir des limites élastiques s'élevant pour le cuivre à 3.000 et 4.900 atm. Donc, n'était-ce l'élévation de température produite par le choc et qui tend à réduire γ on pourrait s'attendre à rencontrer des Δp de l'ordre indiqué ci-dessus.

Les résultats de Curran déjà mentionnés (réf. 25) sont conformes à ces prévisions. C'est pourquoi il est nécessaire d'établir un schéma élastique-plastique.

d. Interprétation des résultats expérimentaux.

Les expériences avaient pour but d'une part de déterminer l'atténuation d'un choc induit dans l'aluminium — et par conséquent la fonction $\widehat{\frac{dp}{dx}}(x)$ d'autre part de mesurer l'épaisseur de la première écaille pour des plaques d'épaisseur variable. La texture de ces dernières indiquait un laminage intense dans une direction parallèle à l'onde de choc. En outre, des pastilles cylindriques usinées dans des tiges tréfilées étaient encastrées dans ces plaques. Les formes des grains sont indiquées schématiquement sur la figure ci-dessous :

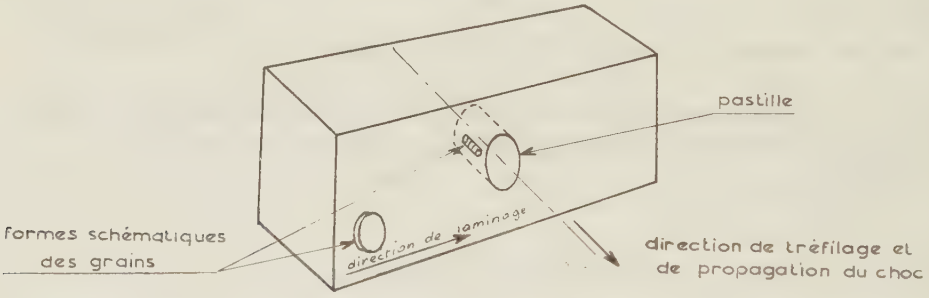


Tableau VI

Épaisseur de la plaque choquée	Épaisseur de la première écaille		Épaisseur des écailles suivantes		Tension de rupture R		p'
	Plaque	Pastille	Plaque	Pastille	Plaque	Pastille	
mm	mm	mm	mm	mm	atm	atm	atm
10	1,05 ± 0,1	//	0,4 − 0,8	//	//	//	//
15	0,8 ± 0,1	1,5 ± 0,2	0,5 − 0,9	//	31.000	58.500	224 10^3
25	1,15 ± 0,15	//	0,6 − 1,4	1,4 − 1,6	31.700	//	184 10^3
35	1,4 ± 0,2	2,3 ± 0,3	0,6 − 2	1,4 − 1,7	32.100	52.600	156 10^3
45	1,6 ± 0,2	3,2 ± 0,5	0,8 − 2	1,4 − 1,7	34.500	69.000	136 10^3

Le calcul de R a été ici effectué en négligeant les phénomènes élastiques (schéma hydrodynamique). On peut tenter d'en tenir compte en utilisant les résultats obtenus par CURRAN, mais il ne précise pas sur quel aluminium il a travaillé (taille et forme des grains, texture, pureté, écrouissage préalable des échantillons) et il est difficile de savoir dans quelle mesure la limite élastique apparente dont il donne une estimation reflète l'effet des grandes vitesses de déformation. Notons cependant que dans nos expériences d'écaillage le métal se trouve détendu encore plus rapidement que dans les siennes.

Les chiffres qu'il fournit conduisent à une diminution très notable des tensions de rupture, de l'ordre de 15.000 atm. environ. Il apparaît d'ailleurs illusoire de tenter une évaluation précise à cause des incertitudes indiquées ci-dessus et en particulier parce qu'on ignore si derrière le choc les deux échantillons d'aluminium utilisés possèdent les mêmes propriétés de plasticité (en particulier la même limite élastique).

La comparaison des épaisseurs des secondes écailles montre toutefois que l'écart entre les tensions de rupture de la pastille et de la plaque est réel et ne doit pas être attribué entièrement à une différence systématique dans le comportement élastique sous hautes pressions.

Il est bon de placer nos résultats par rapport à ceux déjà obtenus par d'autres auteurs utilisant des techniques différentes. O'BRIEN et DAVIS (réf. 32) ont opéré sur des échantillons d'aluminium variés, monocristaux et métal polycristallin écroui ou recuit, en suivant les méthodes de RINEHART. Ils situent R entre 12.000 et 18.000 atm., quelle que soit la nature de l'aluminium traité. Il faut préciser que dans leurs expériences $\hat{p} \leqslant 45.000$ atm., RINEHART et PEARSON (réf. 33) avaient obtenu auparavant R $\sim$ 9.600 atm.

L'expérience montre que les métaux C. F. C. ne subissent jamais de rupture fragile; cependant, on ne peut guère qualifier de ductile le mode de fracture par écaillage. En particulier la rupture se produit après une déformation plastique très limitée (de l'ordre de 20 %) alors qu'au cours d'essais sur éprouvettes, les microfractures n'apparaissent et ne se développent qu'à la suite d'allongements locaux très importants (plusieurs centaines de %). Il est donc probable que dans le cas présent les concentrations de dislocations (empilements) ne sont pas assez nombreuses et assez importantes pour donner naissance à des fissures de Griffith sous l'effet de tensions sensiblement inférieures à la limite théorique de rupture. C'est donc à une estimation par défaut de cette dernière que les expériences d'écaillage peuvent conduire. (Le chiffre de rupture inférieur obtenu pour une texture de laminage s'explique sans doute par une cohésion affaiblie aux joints de grains). On pourrait donc s'attendre à ce que la tension de rupture décroisse lorsque l'écrouissage donné au métal et par conséquent la pression du choc initial augmentent.

CONCLUSION

Nous avons essayé dans cette étude d'établir un modèle général pour traiter la plasticité des métaux C. F. C. sous hautes pressions dynamiques. Ce qui nous a conduit d'une manière indirecte à proposer une nouvelle expression, où intervient le module de cisaillement, du coefficient de GRÜNEISEN.

Il nous a d'autre part semblé justifié d'introduire dans le schéma mécanique des paramètres dits d'écrouissage afin de donner aux équations de comportement un sens vraiment physique. Complication superflue si l'on ne voit dans un modèle qu'un habit à ajuster sur une série d'observations macroscopiques expérimentales.

Mais notre approche présente deux avantages. Elle permet de tirer d'essais mécaniques :

— des renseignements quantitatifs sur les phénomènes physiques sous-jacents (mesure d'énergie d'activation par exemple);
— d'effectuer des prévisions, particulièrement utiles dans ce domaine des déformations dynamiques où les mesures sont très difficiles.

La méthode qui consiste à regarder les défauts ponctuels et linéaires comme des distorsions du continu élastique macroscopique (« continuum model ») permet de n'introduire qu'une seule nouvelle grandeur non géométrique, le coefficient de LAMÉ. Elle a déjà été employée avec succès dans les cas voisins de la fusion et de la diffusion (réf. 34).

Nous avons ensuite appliqué ces idées générales à quelques problèmes connexes — structure des chocs, interprétation de l'adiabatique dynamique expérimentale, écaillage — qui se trouvent ainsi cernés plus précisément et mieux compris.

Certains points toutefois ne sont pas complètement éclaircis. On ne sait comment l'énergie de faute varie avec la densité. On hésite sur les écrouissages et les taux d'imperfections engendrées par choc. On ignore jusqu'à quel point la vitesse même de glissement des dislocations reste négligeable. Enfin, des modèles tels que ceux proposés dans le paragraphe 2.5 [cf. en particulier équations (14)] et dont la forme exacte reste à préciser doivent être soumis à l'épreuve d'expériences fines et nombreuses, aisément réalisables dans le domaine des faibles vitesses de déformation. De nouveaux efforts sont particulièrement nécessaires dans ces directions.

ANNEXE 1

Les calculs d'écoulement monodimensionnel relatifs au problème de l'écaillage ont été effectués en coordonnées lagrangiennes et utilisent les relations de différenciation valables sur les courbes caractéristiques des plans *x-t* ou *p-u*.

Soit C la vitesse du son lagrangienne et locale.

Rappelons que sur la caractéristique Γ^+ de pente $\frac{dx}{dt} = C$:

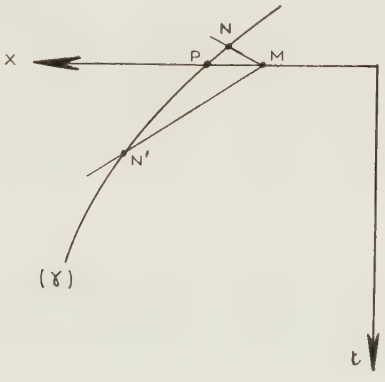
$$\frac{dp}{dt} + C\rho_0 \frac{du}{dt} = 0,$$

tandis que sur la caractéristique Γ^- de pente $\frac{dx}{dt} = -C$:

$$\frac{dp}{dt} - C\rho_0 \frac{du}{dt} = 0.$$

1. *Affaiblissement des chocs plans.*

Les relations (1), p. 52, se démontrent aisément en considérant un point M situé derrière et au voisinage du choc de trajectoire (γ) et les deux caractéristiques issues de M qui coupent (γ) en N et N'. On obtient immédiatement à partir des triangles infinitésimaux PMN' et PMN :



$$\text{PMN}' \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x}(\omega - C) + \left[\dfrac{dp}{dt}\right]_{\Gamma+} = \dfrac{\widehat{dp}}{dx}\omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\omega - C) + \left[\dfrac{du}{dt}\right]_{\Gamma+} = \dfrac{\widehat{du}}{dx}\omega \end{cases}$$

$$\text{PMN} \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x}(\omega + C) + \left[\dfrac{dp}{dt}\right]_{\Gamma-} = \dfrac{\widehat{dp}}{dx}\omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\omega + C) + \left[\dfrac{du}{dt}\right]_{\Gamma-} = \dfrac{\widehat{du}}{dx}\omega \end{cases}$$

D'où :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} + C\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}\right)(\omega - C) = \omega\left(\frac{\widehat{dp}}{dx} + C\rho_0 \frac{\widehat{du}}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} - C\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}\right)(\omega + C) = \omega\left(\frac{\widehat{dp}}{dx} - C\rho_0 \frac{\widehat{du}}{dx}\right)$$

On élimine d'abord $\frac{\partial u}{\partial x}$ entre ces deux équatins; reste une relation entre $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\widehat{dp}}{dx}$ et $\frac{\widehat{du}}{dx}$. Mais, d'après les relations d'Hugoniot :

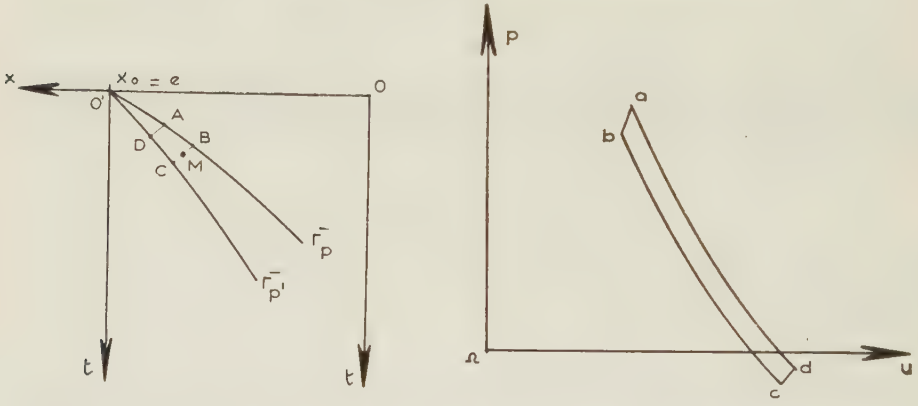
$$\widehat{p} = \rho_0 \frac{u^2}{1 - \nu}.$$

D'où :

$$\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)\widehat{dp} = -\frac{2\rho_0}{\omega}\widehat{du}$$

et finalement la première des relations cherchées.

2. *Analyse de la détente produite à la réflexion du choc sur la surface libre.*



Soient Γ^-_p et $\Gamma^-_{p'}$ les deux caractéristiques issues de O′ et de pentes égales respectivement à $-C_p$ et $-C_{p'}$. Il est commode de raisonner sur le quadrilatère curviligne infinitésimal ABCD délimité par ces deux courbes et deux autres caractéristiques Γ^+. Il lui correspond une image *abcd* dans le plan des *p-u* où les courbes caractéristiques qui portent les arcs *ad* et *bc* se déduisent l'une de l'autre par translation parallèle à Ωu (cf. fig. ci-dessus).

Par conséquent :

$$\frac{\left[\Delta p\right]^C_D}{C_{p'}} = \frac{\left[\Delta p\right]^B_A}{C_p}.$$

D'autre part, les arcs $\overset{\frown}{AD}$ et $\overset{\frown}{BC}$ appartiennent approximativement à des hyperboles équilatères centrées en O′ puisque rayon vecteur O′M et tangente doivent admettre les axes de coordonnées comme directions bissectrices. Il en résulte que :

$$\frac{\left[\Delta x\right]^C_D}{\sqrt{C_{p'}}} = \frac{\left[\Delta x\right]^B_A}{\sqrt{C_p}}.$$

L'égalité (2), p. 57, se déduit des deux résultats précédents.

ANNEXE 2

INFLUENCE DE LA PRESSION

Il serait certainement plus rigoureux et parfois absolument nécessaire d'introduire à côté de b, S_{11}, S_{11}, μ et T d'autres paramètres physiques caractéristiques du comportement du métal vis-à-vis des dislocations. Rappelons l'hypothèse sur l'énergie de faute et le caractère représentatif du seul coefficient d'élasticité μ ; $A = \dfrac{c_{11}^0 - c_{12}^0}{2c_{44}^0}$ et $B = \dfrac{K^0}{c_{44}^0}$ sont supposés constants (cf. p. 15). Signalons pour mémoire le coefficient de Grüneisen γ et la chaleur spécifique massique C_v dont les rôles semblent très secondaires.

En ignorant la pression on impose une simplification parfois abusive. Ce paramètre mécanique s'introduit d'une manière fondamentale dès qu'un défaut du réseau ou un mécanisme de glissement (intersection) induit une dilatation moyenne à pression constante. Or il en est généralement ainsi.

Si les fréquences restent probablement peu sensibles à la pression, considérée comme une caractéristique mécanique indépendante de ρ et T, il n'en est pas ainsi des énergies. Introduisons un nouveau paramètre sans dimension $p^* = \dfrac{p}{\mu}$; une énergie indépendante de la température s'écrira alors $U = \mu b^3 \psi (\bar{S}_{11}^*, S_{11}^*, p^*)$, expression aussi bien valable pour l'énergie spécifique d'un arc de dislocation que pour une énergie d'activation. Des fonctions U linéaires en p^* seront probablement suffisantes dans un certain domaine de pressions.

Cette complication entraîne des modifications évidentes de certains résultats exposés dans les chapitres 2 et 3 et fournit peut-être une explication du désaccord entre mesures et prévisions au sujet de la limite élastique (cf. p. 46).

PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISÉS

p ..... pression hydrostatique.

v ..... volume massique.

ρ ..... masse volumique.

T ..... température absolue.

$\chi = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t$ ..... coefficient de compressibilité.

$K = \frac{1}{\chi}$

E, F, S ..... énergie interne, énergie libre de Helmholz et entropie massique.

$\gamma = v\left(\frac{\partial p}{\partial E}\right)_T$ ..... coefficient de Grüneisen.

μ ..... module de cisaillement (de Lamé).

ν ..... coefficient de Poisson (en général adiabatique).

e_{ij} ..... tenseur de déformation ($e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0$).

K_i ..... paramètre d'écrouissage.

v_i ..... composante de la vitesse matérielle.

u_{ij} ..... tenseur déviateur de la vitesse de déformation ($u_{11} + u_{22} + u_{33} = 0$).

S_{ij} ..... tenseur déviateur des contraintes ($S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0$).

a (ou a_i) ..... vitesse eulérienne d'une onde sonique.

C_p ..... vitesse lagrangienne d'une onde sonique.

c_{ij} (ou c_{ijkl}) ..... coefficient d'élasticité.

$J_1^s = S_{ii}$ $\qquad J_2^s = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ji}$ $\qquad J_3^s = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki}$

$J_1^e = e_{ii}$ $\qquad J_2^e = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ji}$ $\qquad J_3^e = \frac{1}{3} e_{ij} e_{jk} e_{ki}$

RÉFÉRENCES

1. V. Y. Vashchenko, V. N. Zubarev, « Soviet Physics » *Solid State,* vol. 5, n° 3 (1963), p. 653.
2. G. Leibfried, W. Ludwig, *Solid State Physics,* vol. 12 (1961), p. 275.
3. J. M. Ziman, *Electrons and phonons,* Clarendon Press, Oxford (1960).
4. F. W. Sheard, *Phil. Mag.,* (1958), 3, 1381.
5. W. B. Daniels dans *Progress in very high pressure research,* édited by F. P. Bundy (John Wiley, 1961), p. 203.
6. R. Hill, *Proc. Phys. Soc.,* A 65, 349.
7. J. D. Eshelby, *Progress in Solid Mechanics,* vol. 2 (North Holland Publishing Company, 1961), p. 87.
8. C. M. Zener, *Elasticity and anelasticity of metals,* The University of Chicago Press (1948).
9. P. Beatrix, *Ann. Phys.,* t. 10 (1965), p. 13.
10. K. Fuchs, *Proc. Roy. Soc.,* A 153, 622 (1936), A 157, 444 (1936).
11. R. E. Schmunk, C. S. Smith, *J. Phys. Chem. Solids,* 9, 100 (1959).
12. Budianky, Tai Te Wu, *Theorical prediction of plastic strains of polycristals,* 4e U.S. National Congress of Applied Mechanics.
13. R. Hill, *The mathematical theory of plasticity,* Oxford University Press (1950).
14. W. Prager, P. G. Hodge, *Theory of perfectly plastic solids,* John Wiley (1951).
15. J. Mandel, *Cours de mécanique professé à l'École polytechnique.*
16. J. F. W. Bishop, R. Hill, *Phil. Mag.,* vol. 42 (1951), p. 414.
17. J. F. W. Bishop, R. Hill, *Phil. Mag.,* vol. 42 (1951), p. 1298.
18. D. McLean, *Mechanical properties of metals,* John Wiley (1962).
19. J. Friedel, *Les dislocations,* Gauthier-Villars (1956).
20. J. Weertman, « Response of metals to high velocity deformation », *Interscience,* New-York (1961).
21. U. S. Lindholm, *J. Mech. Phys. Solids,* 12, 317 (1964).
22. F. P. Bullen, C. B. Rogers, *Phil. Mag.,* 11, 191 (1965).
23. F. E. Hauser, J. A. Simmons, J. E. Dorn, « Response of metals to high velocity deformation », *Interscience,* New-York (1961).
24. C. S. Smith, « Metallographic studies of metals after explosive shock », *Transactions of the Metallurgical Society of Aime* (October 1958), p. 573.
25. D. R. Curran, *Journal of Applied Physics,* 34, 9, 2677 (1963).
26. P. W. Bridgman, « Effects of high hydrostatic pressure on the plastic properties of metals », *Review of modern physics,* 17 (1945), p. 3.
27. P. Beardmore, A. H. Holtzman, M. B. Bever, *Transactions of the metallurgical Society of Aime,* vol. 230 (June 1964), 725.
28. W. M. Lomer, Defects in pure metals dans *Progress in metal physics,* vol. 8, p. 255, Pergamon Press (1959).
29. J. M. Walsh, M. H. Rice, R. G. Mc Queen, F. L. Yargfr, *Phys. Rev.,* 108, 196 (1957).
30. M. H. Rice, R. G. McQueen, J. M. Walsh, « Solid state physics », *Advances in research and applications,* Academic Press, New-York, 1958, vol. 6, p. 1.
31. R. G. McQueen, S. P. Marsh, *Journal of Applied Physics,* vol. 31, 7 (July 1960).
32. J. L. O'Brien, B. S. Davis, On the fracture of solids under impulsive loading conditions dans *Response of metals to high velocity deformation,* Conférence d'Estes Park (juillet 1960).
33. J. S. Rinehart, H. J. Pearson, Behavior of metals under impulsive loads (1954).
34. R. W. Keyes, Continuum models of the effect of pressure on activated processes dans *Solids under pressure,* édité par W. Paul et D. M. Warschauer, McGraw - Hill (1963).

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Vu et approuvé :

Paris, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MARC ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN ROCHE

IMPRIMERIE NATIONALE. — 66 2111 0 67 003 3